Cálculo para administración y turismo

Cálculo para administración y turismo

Héctor Javier Rendón Contreras

Universidad de Guadalajara
2009

Primera edición, 2009

ISBN 978-607-450-177-3

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Contenido

Introducción

Héctor Javier Rendón Contreras

Conociendo la problemática tan compleja que implica la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la educación superior, se ha trabajado en la elaboración de este material bibliográfico, como apoyo a las licenciaturas de administración y turismo del Centro Universitario de la Costa el cual le facilite el uso de recursos matemáticos que le permita planear, modelar y analizar la información, con el objeto de estar en condiciones para la toma de decisiones en la optimización de recursos.

El objetivo principal de este texto es de consolidar bases matemáticas la cual permita que el alumno incursione en herramientas cada vez más complejas y ayude al análisis de fenómenos económico-administrativos desde una perspectiva más objetiva. Así el alumno será capaz de formular problemas, analizar la información y buscar estrategias que le permitan resolverlos, así presente alternativas de solución apoyadas en fundamentos matemáticos.

Este libro comprende básicamente el estudio de las derivadas e integrales, así como sus aplicaciones.

En el capítulo I comprende el estudio dedicado a la derivada en sus conceptos netamente matemáticos, iniciando con el concepto de límites y continuidad.

Se continúa con la definición de derivada y su interpretación geométrica, para luego estudiar todo lo que es la derivada mediante diferentes técnicas. A lo largo de este capítulo se da gran importancia al concepto de derivada como razón de y al análisis marginal en Economía.

En el capítulo II se enseñan las aplicaciones de la derivada en el trazado de curvas, lo que permite determinar valores máximos y mínimos, puntos de inflexión y asíntotas. Este capítulo termina con una parte dedicada al estudio de problemas de optimización, que es precisamente, una de las aplicaciones más necesarias y útiles para un estudiante de ciencias económicas.

Capítulo III, se conoce la operación inversa de la derivada, la antiderivada o integración, conociendo sus diferentes técnicas de integración, por sustitución, integración indefinida, integración definida y el concepto de área bajo una o dos curvas.

En el capítulo IV se pone especial interés en la aplicación del cálculo integral en el campo de la economía y ciencias sociales. Que por razones de tiempo de los cursos de Matemáticas II (80 horas), en todos los temas tratados se da más importancia a la aplicación práctica que a la demostración teórica.

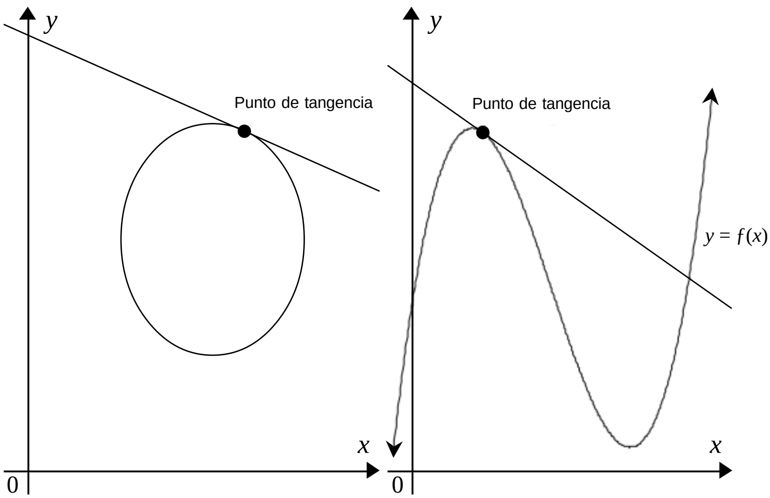
Se debe iniciar el estudio de Matemáticas II con una sólida base matemática, principalmente en álgebra y geometría. Si se prepara para ingresar a una carrera como turismo ó administración, y ha tomado el curso de Matemáticas I, no deberá existir ninguna dificultad al estudiar este texto, ya que se realizó para brindar una comprensión sencilla.

UNIDAD I

La derivada

1.1 Rectas tangentes

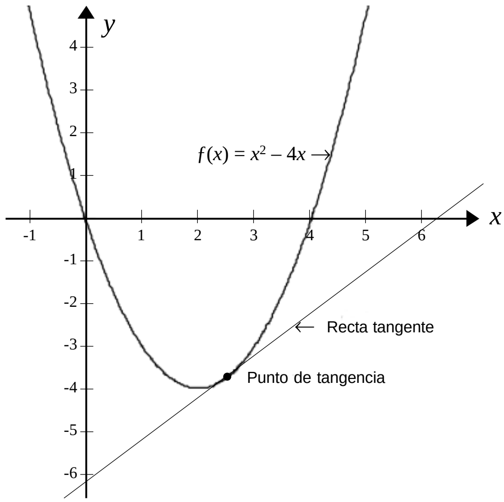
Toda línea que toca únicamente un punto en una circunferencia o en una curva se le conoce como *recta tangente.*



Rectas tangentes de una circunferencia y de una función $f(x)$

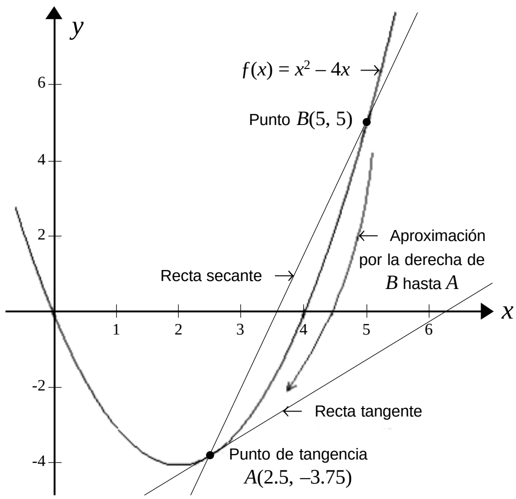
Durante el estudio del cálculo diferencial es necesario conocer el valor de la pendiente m y la ecuación de estas rectas tangentes.

Para ilustrar este ejemplo, se desea determinar el valor de la pendiente m, así como la ecuación de la recta tangente que toca el punto de tangencia $A(2.5, -3.75)$ en la gráfica $f(x) = x^2 - 4x$.

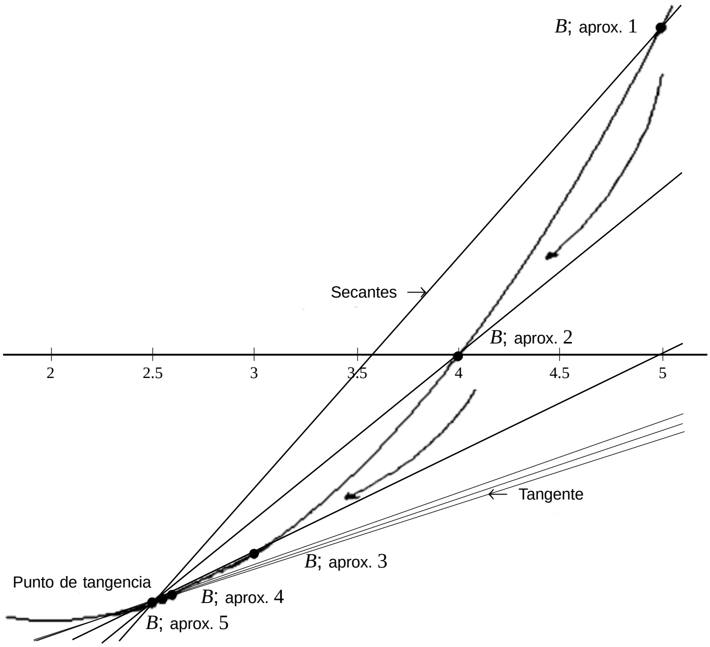


Gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x$

Para encontrar la ecuación de la recta tangente es necesario determinar el valor de su pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Para ello es necesario conocer dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), y del cual solamente se conoce uno de ellos, el punto de tangencia. Pero se puede calcular la pendiente m por aproximación y esto se logra cortando la curva con una recta secante para obtener dos puntos conocidos: el punto de tangencia $A(0.5, –5.125)$ y un punto $B(5, 5)$.



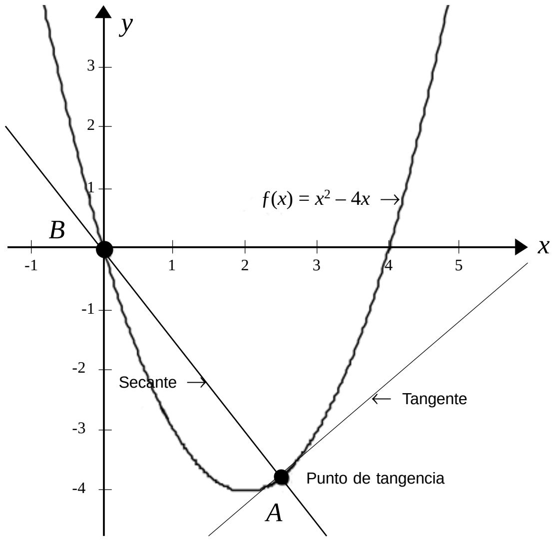
Ahora habrá que aproximar el punto B al punto de tangencia A y de esta manera obtener el valor de cada una de las pendientes m de estas secantes:



Aproximaciones por la derecha $B^{+} \rightarrow A$:

Aprox.	Rectas Secantes		Pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
	Punto de tangencia $A(x_1, y_1)$	B^{+} (x_2, y_2)	
1	$A(2.5, -3.75)$	$B(5, 5)$	3.5
2	$A(2.5, -3.75)$	$B(4, 0)$	2.5
3	$A(2.5, -3.75)$	$B(3, -3)$	1.5
4	$A(2.5, -3.75)$	$B(2.6, -3.64)$	1.1
5	$A(2.5, -3.75)$	$B(2.55, -3.6975)$	1.05

De la misma manera se aproxima el punto B al punto de tangencia A por la parte de la izquierda:



Aproximaciones por la izquierda $B^- \rightarrow A$:

Aprox.	Rectas Secantes		Pendiente $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
	Punto de tangencia $A(x_1, y_1)$	$B^-(x_2, y_2)$	
1	$A(2.5, -3.75)$	$B(0, 0)$	-1.5
2	$A(2.5, -3.75)$	$B(1, -3)$	-0.5
3	$A(2.5, -3.75)$	$B(2, -4)$	0.5
4	$A(2.5, -3.75)$	$B(2.4, -3.84)$	0.9
5	$A(2.5, -3.75)$	$B(2.49, -3.7599)$	0.99

Se puede apreciar que a medida que el punto B se aproxima cada vez más hacia A por la derecha ($B^+ \rightarrow A$), la pendiente m toma el valor de 1; de manera similar, cuando el punto B se aproxima hacia el punto de tangencia por la parte de la izquierda ($B^- \rightarrow A$), el valor de la pendiente m está más próxima a 1.

Por lo tanto, el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $A(2.5, –3.75)$ es de $m = 1$.

Esto se puede expresar que la pendiente de la recta tangente al punto $A(2.5, –3.75)$ es el límite de todas las pendientes de las rectas secantes calculadas anteriormente. Su notación matemática es:

$$\lim_{B \to A} x^2 - 4x = 1$$

Una vez determinado el valor de la pendiente m de la recta tangente se puede calcular la ecuación de esta recta.

Utilizando la forma de la ecuación dado un punto y su pendiente $y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1)$, se calcula

Con el punto conocido, el punto de tangencia	$y_2 - (-3.75) = 1(x_2 - 2.5)$
$A(2.5, –3.75)$ y el valor de la pendiente $m = 1$, se	$y = x - 2.5 - 3.75$
obtiene la ecuación de la recta tangente.	$y = x - 6.25$ Ecuación de la recta tangente

1.2 Límites

Una vez determinado el concepto del límite en la sección 1.1, al calcular la pendiente m de una recta tangente a una función, en ésta sección se analizará la noción más clara de límite. El límite de una función es indispensable para iniciarse en el estudio del cálculo.

Lo que hace importante el estudio del cálculo y lo diferencia de otras ramas de las matemáticas como el álgebra y la trigonometría, es la noción del límite.

Como se describió en la sección 1.1, cuando todas las rectas secantes al convertirse en una recta tangente en un punto determinado de una función $f(x)$, se conocen como el límite de todas las secantes.

El concepto del límite en general describe lo que sucede a una función $f(x)$ a medida que su variable x se aproxima a un valor constante k.

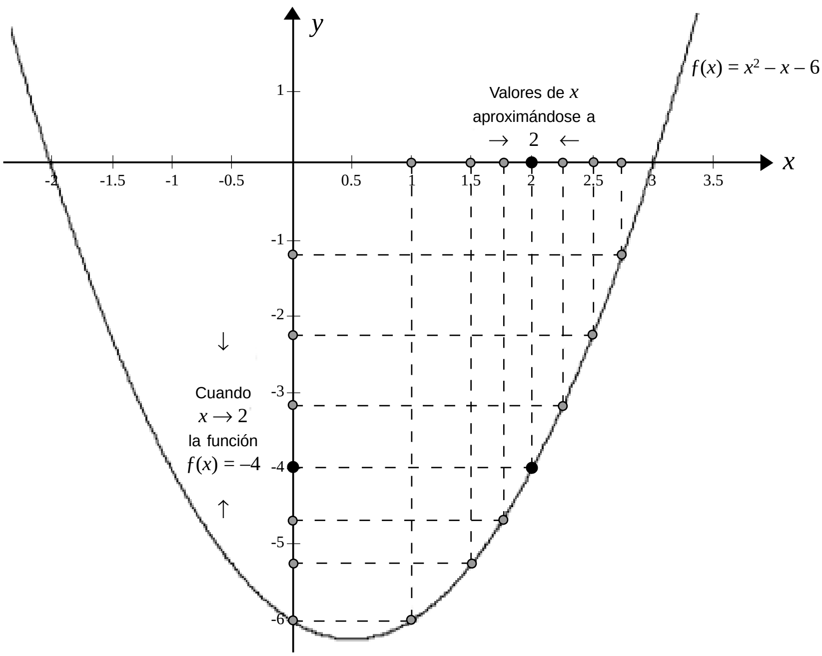
Para demostrar lo anterior se determina el comportamiento de una función $f(x) = x^2 - x - 6$ en el punto $(2, -4)$. En el tabulador siguiente resume el comportamiento de la función $f(x)$ cuando x se aproxima a 2, tanto por la izquierda como por la derecha (izq. $x \rightarrow 2 \leftarrow x$ der.).

x se aproxima a 2 por la izquierda $\rightarrow$ $\leftarrow$ x se aproxima a 2 por la derecha

x	1.8	1.9	1.95	1.99	2	2.01	2.1	2.2	2.5
$f(x)$	–4.56	–4.29	–4.147	–4.029		–3.969	–3.69	–3.36	–2.25

En esta tabla se muestra que la función $f(x)$ tiende a –4 cuando x se aproxima cada vez más a 1 por ambos lados. Y su notación matemática es

$$\lim_{x \to 2} x^2 - x - 6 = -4$$



Interpretación geométrica de la relación $\lim_{x \to 2} (x^2 - x - 6) = -4$

En conclusión, una función $f(x)$ tiende al límite l (en y) a medida que x se aproxima a una constante k (en x), y se escribe:

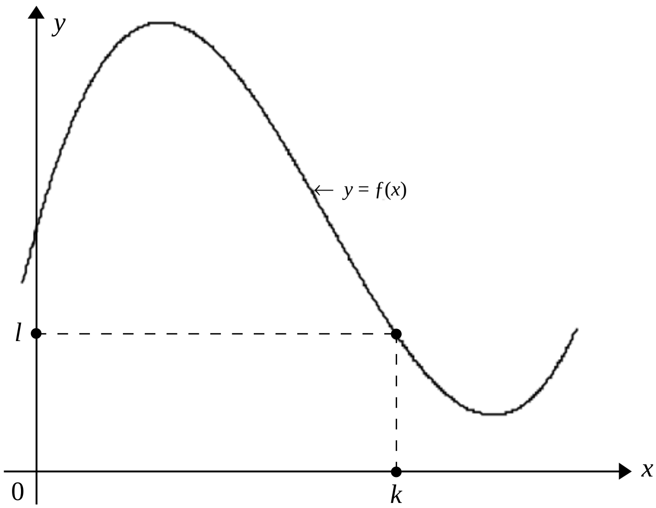
$$\lim_{x \to k} f(x) = l$$

Si l existe, este valor es único.

En algunos casos el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a k coincide con $f(k)$, en otros casos no se cumple necesariamente, ya que no siempre $f(x)$ está definida en k y sin embargo el límite existe.

Se ilustran tres ejemplos para definir estos casos:

1. El límite de la función $f(x)$ en el valor k es igual al valor de $f(k)$. Esta situación permite evaluar los límites en forma directa.



$$\lim_{x \to k} f(x) = l = f(k)$$

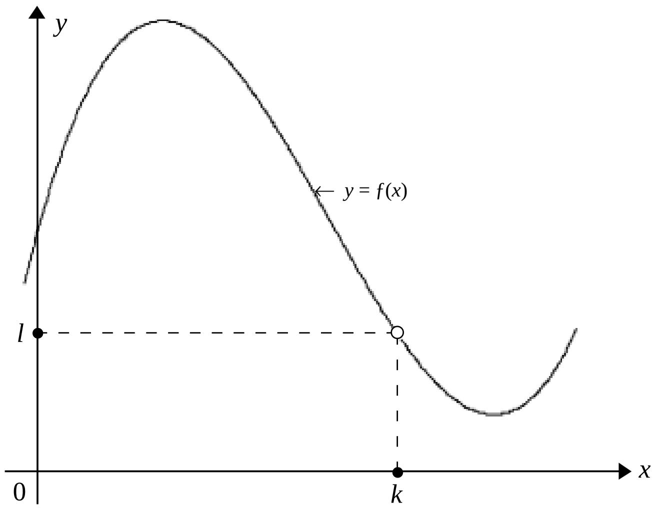
EJEMPLO 1.1 Evaluar el siguiente límite:

Aquí se aplica el límite directamente $\lim_{x \to 3} (x^2 - x + 2)$

$$= (3)^2 - (3) + 2 = 8$$

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - x + 2) = 8$$

2. El límite de $f(x)$ en k existe, pero no es igual al valor de $f(k)$. Esto se debe a que la función $f(x)$ no está definida en $x = k$. Para resolver estos límites, es necesario determinar si se puede simplificar la función $f(x)$ factorizándola. Una vez simplificada $f(x)$ se aplica el límite.



$\lim\limits_{x \to k} f(x) = l$, pero la función no está definida en k

EJEMPLO 1.2 Calcular $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

Como la función no está definida en $x = 4$, no se puede resolver directamente, y se procede a factorizar la función:

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(x - 4)}\,(x + 3)}{\cancel{x - 4}}$$

$$= \lim_{x \to 4} (x + 3) = [(4) + 3] = 7$$

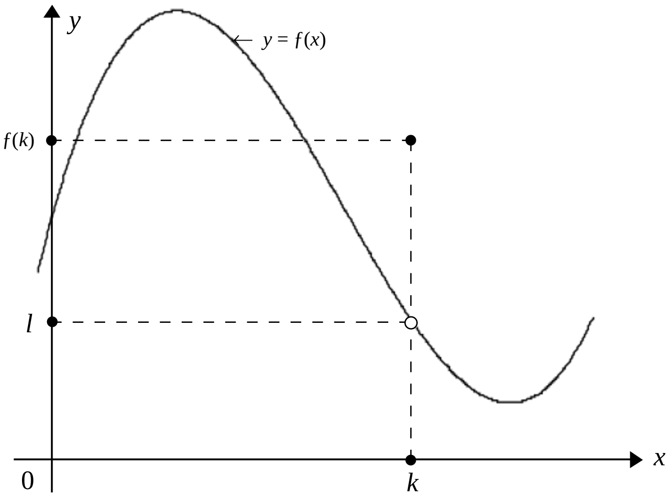
entonces: $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 4} = 7$

Estos límites también se pueden resolver con un tabulador: $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

		x se aproxima a 4 por la izquierda		$\rightarrow$	$\leftarrow$	x se aproxima a 4 por la derecha		
x	3.8	3.9	3.95	3.99	4	4.01	4.1	4.2	4.5
$f(x)$	6.8	6.9	6.95	6.99		7.01	7.1	7.2	7.5

$f(x) = 7$

3. La función $f(x)$ no está definida en k pero $f(k) \neq l$. Entonces el procedimiento es igual que en el caso 2.



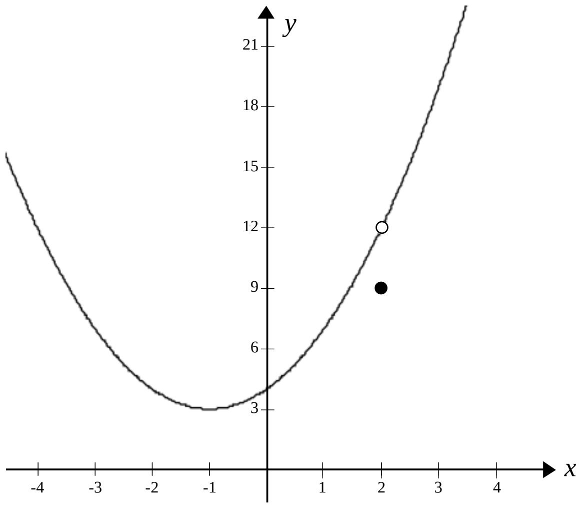
$\lim\limits_{x \to k} f(x) = l$, pero $l \neq f(k)$

Ejemplo 1.3 Evaluar el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 2} \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} \\ 9; \text{ si } x = 2 \end{cases}$

Como f no está definida en $x = 2$ se realiza el procedimiento del caso 2

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \quad \text{factorizando} \quad \frac{\cancel{(x-2)}\,(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{(x-2)}}$$

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) \text{ aplicando el límite } (2)^2 + 2(2) + 4 = 12$$



Gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} \\ 9; \text{ si } x = 2 \end{cases}$

Hay que tomar en cuenta en este ejemplo que el límite de la función $f(x)$ en $x = 2$ no depende de $f(2)$.

De los tres casos anteriores se puede concluir que para calcular el límite de una función basta con reemplazar el valor de k $(x \to k)$ en la misma función $f(x)$, siempre y cuando sea posible, si no, habrá que factorizar la función hasta simplificarla y así poder sustituir k en $f(x)$ o aplicar el proceso de tabulación dando valores más próximos en x, y determinar el valor de l.

1.2.1. Propiedades de los límites

En los anteriores ejemplos se han utilizado algunas de las propiedades de los límites. El siguiente teorema presenta sus propiedades:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones, tales que $\lim_{x \to k} f(x) = l_1$ y $\lim_{x \to k} g(x) = l_2$, entonces:

1. Límite de una suma o resta: $\lim_{x \to k} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to k} f(x) \pm \lim_{x \to k} g(x) = l_1 \pm l_2$

2. Límite de un producto: $\lim_{x\to k} [f(x) \cdot g(x)] = [\lim_{x\to k} f(x)] \cdot [\lim_{x\to k} g(x)] = l_1 \cdot l_2$

3. Límite de un cociente: $\lim_{x\to k} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to k} f(x)}{\lim_{x\to k} g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ para toda $l_2 \neq 0$

4. Límite elevado a un exponente n: $\lim_{x\to k} [f(x)]^n = [\lim_{x\to k} f(x)]^n = (l_1)^n$

5. Límite de una constante: $\lim_{x\to k} C = C$

1.2.2. Cálculo de límites

Bajo los tres conceptos mostrados en el tema 1.2, en el cual:

1. $\lim_{x\to k} f(x) = l = f(k)$
2. $\lim_{x\to k} f(x) = l$, pero la función $f(x)$ no está definida en k
3. $\lim_{x\to k} f(x) = l$, pero $l \neq f(k)$

se puede iniciar en el cálculo de límites. En el siguiente ejemplo se ilustra el empleo de las propiedades de los límites para evaluar los límites de funciones algebraicas.

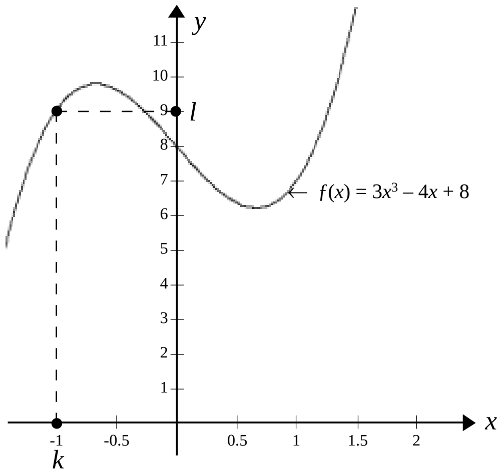
EJEMPLO 1.4 Hallar $\lim_{x\to -1} (3x^3 - 4x + 8)$, al aplicar las propiedades de los límites directamente se tiene:

$= \lim_{x\to -1} 3x^3 - \lim_{x\to -1} 4x + \lim_{x\to -1} 8$

$= 3\,(\lim_{x\to -1} x)^3 - 4\,(\lim_{x\to -1} x) + \lim_{x\to -1} 8$

$= 3(-1)^3 - 4(-1) + 8$

$= 9$



Gráfica de la función $f(x) = 3x^3 - 4x + 8$

1.2.3. Indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{n}{0}$ (donde n es cualquier R*)*

Otra de las dificultades que se presentan durante el cálculo de límites es cuando al sustituir k en $f(x)$, la función se indetermina en $x = k$, es decir, la aplicación de las propiedades de los límites puede conducir a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ como se ilustra en el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

si se aplica las propiedades de los límites directamente: $\dfrac{(\lim_{x\to 2} x)^3 - \lim_{x\to 2} 8}{\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 2} = \dfrac{8-8}{2-2} = \dfrac{0}{0}$

Cuando un límite se indetermina como en el ejemplo anterior, aún no se sabe si éste límite existe o no.

Para salvar esta dificultad, existen diferentes casos en los cuales se pueden salvar la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{n}{0}$ (donde n es cualquier R).

1. Cuando se trata de funciones racionales (cociente de polinomios), la indeterminación se salva factorizando y simplificando. Por ejemplo:

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \dfrac{0}{0}$; factorizando y simplificando, se tiene:

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{\cancel{(x-2)}\,(x^2 + 2x + 4)}{\cancel{(x-2)}}$$

$= \lim_{x\to 2} (x^2 + 2x + 4)$ una vez simplificado se aplica el límite

$$= (2)^2 + 2(2) + 4) = 16$$

2. En otro caso particular, al aplicar las propiedades de los límites a una función irracional y resulta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, se puede evitar multiplicando por el conjugado del numerador (o denominador

según sea el caso), para racionalizarlo. Se realizan las simplificaciones necesarias y se concluye si el límite existe.

EJEMPLO 1.5 Evaluar el siguiente límite (si existe) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{h}}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{h}}{x} = \frac{0}{0} \text{ el límite se indetermina}$$

pero multiplicando $\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ por su conjugado se tiene una diferencia de cuadrados:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{h+x}-\sqrt{h}}{x} \cdot \left(\frac{\sqrt{h+x}+\sqrt{h}}{\sqrt{h+x}+\sqrt{h}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{h+x}\right)^2-\left(\sqrt{h}\right)^2}{x\left(\sqrt{h+x}+\sqrt{h}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{h}+x-\cancel{h}}{x\left(\sqrt{h+x}+\sqrt{h}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{h+x}+\sqrt{h}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+x}+\sqrt{h}}$$

una vez simplificada la función $f(x)$, se aplica el límite cuando $x \to 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{h+(0)}+\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}+\sqrt{h}} = \frac{1}{2\sqrt{h}}$$

Por lo tanto: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{h}}{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{h}}$

3. Si al evaluar un límite y éste se indetermina, más sin embargo, se realizan las operaciones anteriores (factorización y simplificación) y no se salva la indeterminación, se concluye que la función no tiene límite cuando $x \to k$; por ejemplo:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)^2} = \frac{0}{0}; \text{ factorizando:}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x\cancel{-}2)\,(x+2)}{(x\cancel{-}2)\,(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x-2)} \text{ aplicando el límite:}$$

$$= \frac{2+2}{2-2} = \frac{4}{0} \;\therefore\; \text{no hay límite}$$

Cuando ocurre una situación como en el caso 3, se dice que estos límites no existen, es decir, que la función $f(x)$ no tiene un valor definido cuando $x \to k$. Se plantean a continuación 2 situaciones para los cuales no existe el límite de una función.

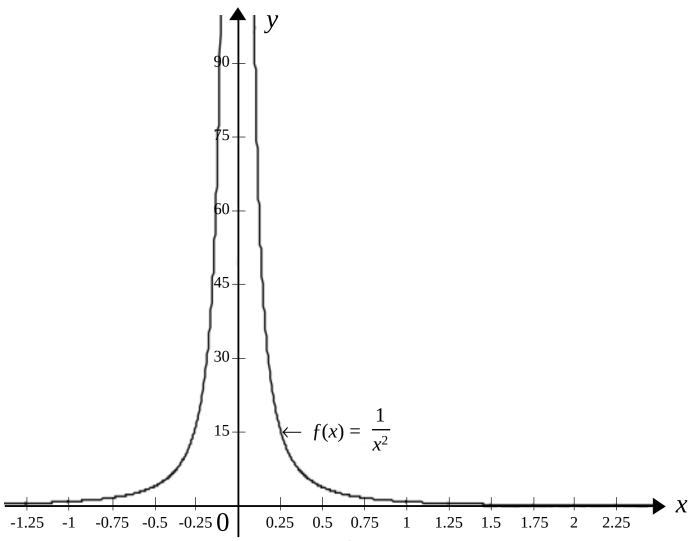
1. La primera sucede cuando x se aproxima cada vez más a una constante k por la izquierda y por la derecha, la función $f(x)$ no tiende a ningún valor finito, es decir que $f(k)$ tiende al infinito más próximo y su representación gráfica es una asíntota.

EJEMPLO 1.6 Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ no se puede simplificar, por lo que:

$= \frac{1}{0}$ = no hay límite

Este ejemplo se puede demostrar gráficamente que no existe el límite y también un tabulador:



A medida que x se aproxima a 0,
la función crece a un valor infinito

Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$

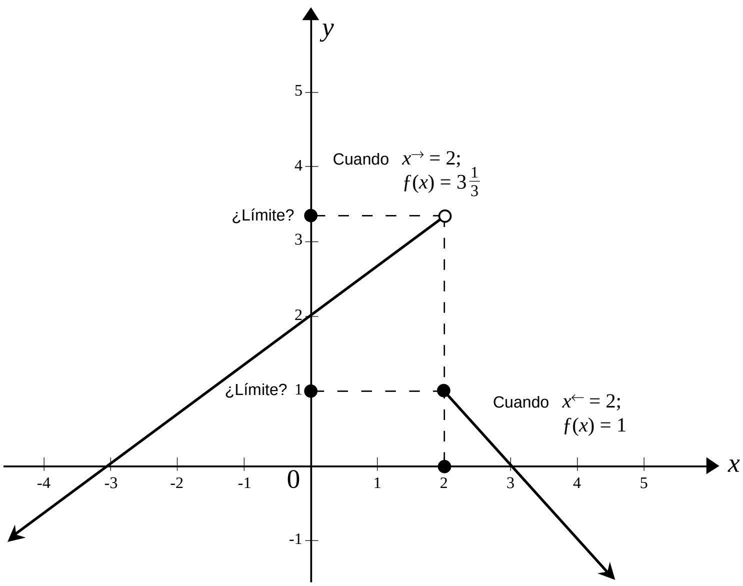
x se aproxima a 0 por la izquierda $\rightarrow$ $\leftarrow$ x se aproxima a 0 por la derecha

x	-2	-1	-0.5	-0.1	-0.01	0	0.01	0.1	0.5	1	2
$f(x)$	0.25	1	4	100	10000		10000	1000	4	1	0.25

a medida que x se aproxima a 0,
$f(x)$ se incrementa a un valor sin límite (no definido)

2. Otra situación en la cual no existe el límite es cuando existe una función compuesta por dos o más gráficos, y cuando ninguno de los dos gráficos coincide con el otro (empatan) cuando $x \rightarrow k$, no existe el límite. Es decir, a medida que un gráfico se aproxima a k por la izquierda toma un valor diferente de $f(x)$, que cuando el otro gráfico se aproxima a k por la derecha.

EJEMPLO 1.7 Evaluar $\lim\limits_{x\to 2} \begin{cases} \frac{2}{3}x + 2 & \text{si } x < 2 \\ 3 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$



Al trazarse los gráficos se aprecia qué, cuando ambos gráficos de la función se aproximan a 2 toman valores diferentes de $f(x)$, por lo tanto no existe el límite.

EJEMPLOS 1.8 Resolver los siguientes límites (si existen):

a) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{8x^3 - 27}{2x - 3}$ se indetermina, pero factorizando

$$= \lim_{x\to\frac{3}{2}} \frac{\cancel{(2x-3)}\,(4x^2 + 6x + 9)}{\cancel{(2x-3)}} = \lim_{x\to\frac{3}{2}} (4x^2 + 6x + 9)$$ aplicando el límite

$$= 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{3}{2}\right) + 9 = 27$$

b) $\lim\limits_{x\to 36} \dfrac{\sqrt{x} - 6}{x - 36}$ al aplicar el límite directamente se indetermina, por lo que se racionaliza

el numerador multiplicándolo por el conjugado de $(\sqrt{x} - 6)$, entonces:

$$= \lim_{x\to 36} \frac{\sqrt{x} - 6}{x - 36} \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} + 6}\right) = \lim_{x\to 36} \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2 - (6)^2}{(x - 36)\left(\sqrt{x} + 6\right)} = \lim_{x\to 36} \frac{\cancel{(x - 36)}}{\cancel{(x - 36)}\left(\sqrt{x} + 6\right)} = \lim_{x\to 36} \frac{1}{\left(\sqrt{x} + 6\right)}$$

una vez racionalizada la función, se aplica el límite $= \dfrac{1}{\sqrt{(36)} + 6} = \dfrac{1}{12}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 + x}}{x} = \dfrac{0}{0}$; se indetermina, multiplicando por el conjugado de $1 - \sqrt{1 + x}$:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1 + x}}{x} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{1 + x}}{1 + \sqrt{1 + x}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(1)^2 - \left(\sqrt{1 + x}\right)^2}{x\left(1 + \sqrt{1 + x}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 - x}{x\left(1 + \sqrt{1 + x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x\left(1 + \sqrt{1 + x}\right)} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{1 + \sqrt{1 + x}}$$

aplicando el límite $= -\dfrac{1}{1 + \sqrt{1 + 0}} = -\dfrac{1}{1 + \sqrt{1}} = -\dfrac{1}{2}$

EJERCICIOS 1.1 Resolver los siguientes límites (si existen):

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x + 1}{x - 2}$

2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x + 1}{x - 2}$

3. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{4t^2 + 3t + 2}{t^3 + 2t - 6}$

4. $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{\sqrt{x} - 5}{x - 25}$

5. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

6. $\lim\limits_{x\to h} \dfrac{x^4 - h^4}{x^2 - h^2}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

8. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^3 - (x + h)^3}{h}$

9. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^2h + 3xh^2 + h^3}{2xh + 5h^2}$

10. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^3 - 8x^2 + x - 4}{x - 4}$

11. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 + 2x - 12}{x^2 + x - 6}$

12. $\lim\limits_{x\to 49} \dfrac{\sqrt{x} - 7}{x - 49}$

1.2.4. Límites infinitos

Estos límites son útiles para evaluar los límites del cociente de dos polinomios cuando $x \to \infty$ (tienda al límite más infinito). Los límites infinitos que se presentan continuamente el desarrollo del cálculo, se presentan a continuación.

1. Límite de un cociente en el cual una constante k es dividida entre una variable que tiende a cero.

$$\lim_{x \to 0} \frac{k}{x} \text{ aplicando el límite } = \frac{k}{0^*} = \infty$$

* Entre más pequeño sea el denominador, el cociente será cada vez más grande.

2. Límite del producto de una constante c por una variable que tiende al límite más infinito.

$$\lim_{x \to \infty} k \cdot x \text{ aplicando el límite } = k \cdot \infty = \infty$$

3. Límite del cociente de una variable entre una constante c, cuando la variable que tiende al límite más infinito.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{k} \text{ aplicando el límite } = \frac{\infty}{k} = \infty$$

4. Límite del cociente en el cual la constante k es dividida entre una variable que tiende al límite más infinito.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x} \text{ aplicando el límite } = \frac{k}{\infty^*} = 0$$

* Entre más grande sea el denominador, el cociente será cada vez más pequeño.

EJEMPLO 1.9 Demostrar que $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{5x - x^2 - 7x^3} = -\frac{2}{7}$

Para resolverlo se obtiene el factor común (x^3)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{5}{x^2} + \frac{1}{x} - 7\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}}{\frac{5}{x^2} - \frac{1}{x} - 7}$$

todas las variables x tienden al límite más infinito, por lo tanto: $= \dfrac{2 - \frac{3}{\infty} + \frac{4}{\infty^3}}{\frac{5}{\infty^2} - \frac{1}{\infty} - 7}$, todo valor dividido entre infinito es igual a 0 (punto 4) $= \dfrac{2-0+0}{0-0-7} = -\dfrac{2}{7}$

EJERCICIOS 1.2 Calcular los siguientes límites infinitos (si existen):

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-2x^2}{3x+5x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+5}{2x+3}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^3-5x^2+3}{2x^3+4x-7}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}$

1.3 Continuidad

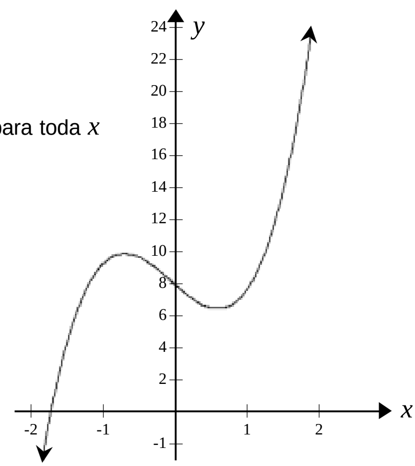
El concepto de continuidad está asociado con la idea de seguir el trazo de una función $f(x)$ sin levantar el lápiz. Bajo este concepto una función continua es aquella en la cual su gráfica no se ve interrumpida al momento de trazarse, es decir, el dominio de la función es $(-\infty, +\infty)$.

Es necesario definir una función continua de una discontinua para el estudio del cálculo, sobre todo en el tema de máximos y mínimos donde se analizan funciones continuas en intervalos cerrados o abiertos para la optimización de funciones.

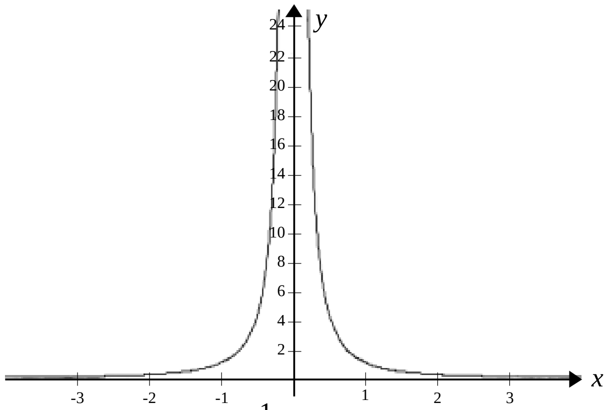
Se analizará la continuidad de algunas funciones que se emplearon en el tema de límites.

1. La función $f(x) = 3x^3 - 4x + 8$ es continua para todo valor de x puesto que el dominio de la función es $(-\infty, +\infty)$.

Función continua para toda x

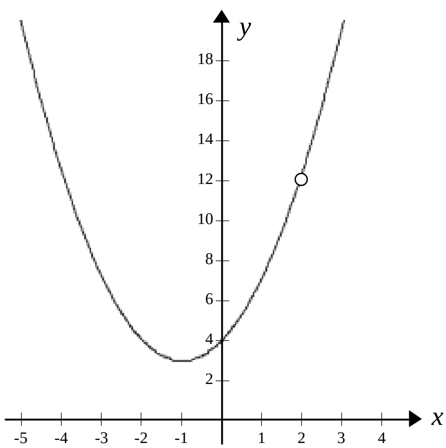


2. La función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ no está definida para $x = 0$, por lo tanto es discontinua, puesto que el dominio de la función es $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ y su gráfica es una asíntota. Se le denomina discontinuidad infinita.



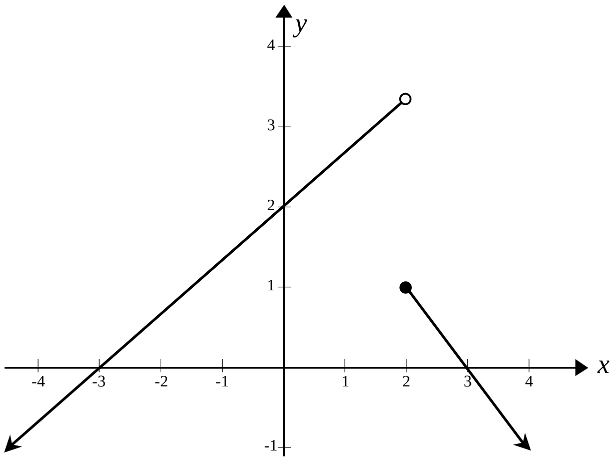
Función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ discontinua en $x = 0$

3. La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ no esta definida para $x = 2$, puesto que el denominador no está definido en 2. El dominio de la función $f(x)$ es $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ y se interrumpe en $(2, 12)$ presentándose un «hueco» en la gráfica. Se le denomina removible porque la discontinuidad se puede eliminar al redefinir $f(x)$ en 2.



Función $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ discontinua en $x = 2$

4. La función $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + 2 & \text{si } x < 2 \\ 3 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ presenta discontinuidad en $x = 2$, puesto que a medida que $f(x)$ toma valores próximos a 2 por la izquierda $(x < 2)$ tiende a $3^1/_3$; mientras que se aproxima a un valor diferente por la derecha $(x \geq 2)$ tiende a 1. Hay un «salto» en $x = 2$ y se presenta la discontinuidad en la gráfica. Se le denomina discontinuidad por salto.

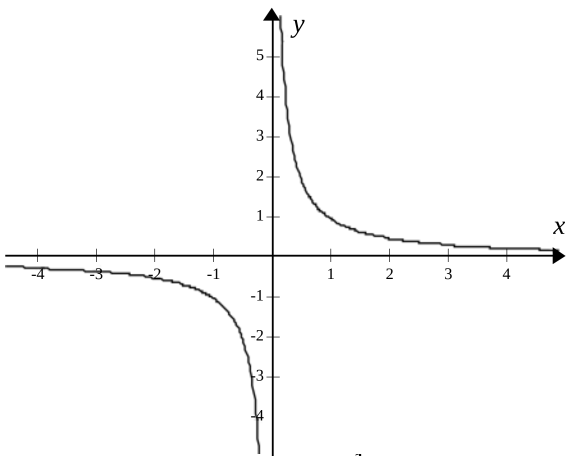


Función discontinua en $x = 2$

EJEMPLOS 1.10 Analizar la continuidad de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Analizando la función se aprecia que no se encuentra definida en $x = 0$ (no hay valores en ese punto de la función, por lo que no existe gráfica en ese punto). Por lo tanto, la función es discontinua en $x = 0$.

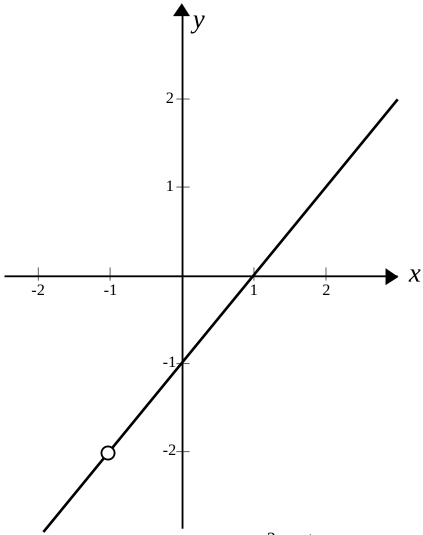


Gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

La función no esta definida en $x = -1$ simplificando la función: $\dfrac{\cancel{(x+1)}\,(x-1)}{\cancel{(x+1)}} = (x - 1)$.

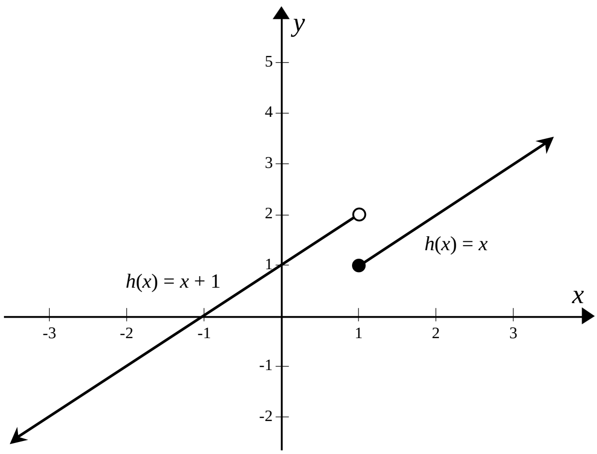
Graficando se obtiene una recta, donde en el punto $(-1, -2)$ se presenta un «hueco».



Gráfica de $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

c) $h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Se dibujan ambos gráficos de la función $h(x)$. Se puede apreciar que «saltan» en $x = 1$, se tiene que $\lim_{x \to 1} h(x)$ no existe, puesto que $h(x)$ se aproxima a 2 por la izquierda y a 1 por la derecha, lo cual la función es discontinua en $x = 1$.



Gráfica de $h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

EJERCICIOS 1.3 Dibujar la gráfica y determinar la continuidad de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

5. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } 2 < x \\ \frac{1}{2}x^2 - 1.5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & \text{si } 0 < x \\ 2 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

6. $y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 9 \\ 0.9x & \text{si } 10 < x \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} |x - 2| & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

4. $g(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } 2 < x \\ \sqrt{4 - x^2} & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ x + 3 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 2} & \text{si } x > -2 \\ -(x + 2) & \text{si } -2 \leq x \end{cases}$

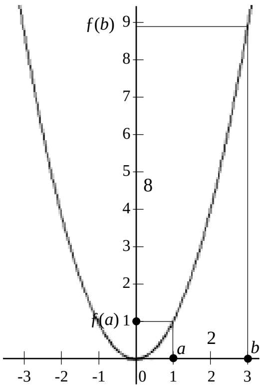
1.4 La derivada

Gottfried Wihelm Leibniz (1646-1716), filósofo y matemático alemán, e Isaac Newton (1642-1727), físico, matemático y astrónomo inglés, son considerados los pioneros de las ideas básicas del cálculo diferencial. Leibniz, quien trabajó en diversas ramas del saber, realizó su obra más importante en el desarrollo del cálculo infinitesimal (1676), cuyos conceptos expuso en *Nuevo método para la determinación de los máximos y mínimos*. A Leibniz se le debe el nombre de cálculo diferencial. Newton trabajando en forma independiente y basado en el estudio del movimiento, llegó al concepto de derivación; inventó su versión del cálculo para explicar el movimiento de los planetas alrededor del sol. Actualmente se utiliza en diversas disciplinas del conocimiento: Ciencias físico-matemáticas, Ciencias económico-administrativas, Ciencias Sociales, Ciencias Biológicas, Ingenierías, etc. Los problemas más comunes es el de calcular las órbitas de los satélites de comunicación, predecir los tamaños de poblaciones, estimar la rapidez con la que se elevan los precios, medir el flujo sanguíneo, etc.

La idea medular del cálculo diferencial es la derivada, que se considera una de las herramientas matemáticas más poderosas que tiene infinidad de aplicaciones. En esta unidad se estudiará el concepto de derivada, su interpretación geométrica, y sus técnicas de derivación.

1.4.1 Variación de una función en un intervalo

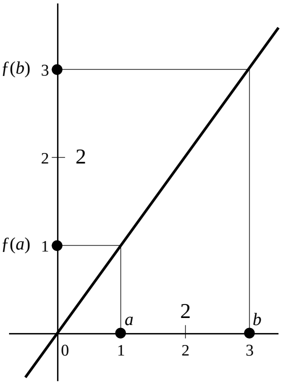
Se considera una función $y = f(x)$. Si la variable independiente x pasa de un valor a hacia un valor b, entonces la variable dependiente y pasa de un valor $y = f(a)$ a un valor $y = f(b)$. La diferencia $b - a$ se llama incremento de x (Δx). La diferencia $y = f(b) - f(a)$ recibe el nombre de incremento de y, o también tasa de variación de la función en el intervalo $[a,b]$.



$\Delta x = b - a = 2$

$f(b) - f(a) = 8$

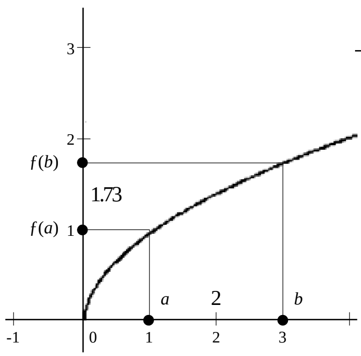
Función $f(x) = x^2$



$\Delta x = b - a = 2$

$f(b) - f(a) = 2$

Función $g(x) = x$



$\Delta x = b - a = 2$

$f(b) - f(a) = 1.73$

Función $h(x) = \sqrt{x}$

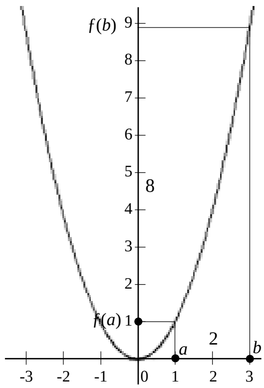
Tasa de variación de cada función en el intervalo $[a,b]$

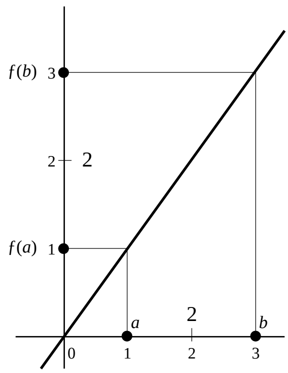
1.4.2 Tasa de variación media

Ya se ha visto que la tasa de variación de una función da una primera idea de la rapidez con que crece (o decrece) en un intervalo, aunque no lo suficientemente precisa.

Así, para comparar el comportamiento de una función en dos o más intervalos, es mejor calcular el crecimiento medio en cada uno de ellos (o crecimiento por unidad). Este crecimiento medio recibe el nombre de tasa de variación media (t.v.m.) de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[a,b]$, y se obtiene como el cociente entre la tasa de variación y la amplitud del intervalo:

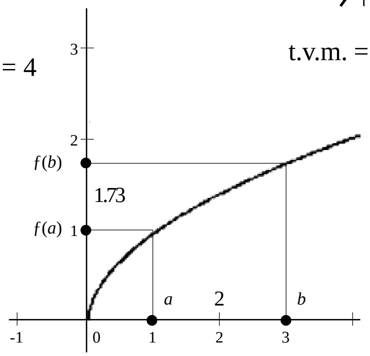
$$\text{t.v.m. } [a,b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$





$$\text{t.v.m.} = \frac{f(b) - f(a)}{\Delta x} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{t.v.m.} = \frac{f(b) - f(a)}{\Delta x} = \frac{2}{2} = 1$$



$$\text{t.v.m.} = \frac{f(b) - f(a)}{\Delta x} = \frac{1.73}{2} = 0.865$$

tasa de variación media (t.v.m.) en diferentes funciones

1.4.3 Tasa de variación instantánea: derivada

Si tenemos en cuenta que b es mayor que a, el intervalo $[a, b]$ se puede expresar como $[a, a + h]$, siendo h un número real positivo, que representa la amplitud del intervalo. De este modo, la t.v.m. se expresaría según la fórmula:

$$\text{t.v.m.} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Aunque la variación media es importante, a veces lo es más la variación en un momento determinado. (Por ejemplo, al departamento de tránsito le importa más la velocidad de un vehículo al cruzar un determinado punto que su velocidad media por hora; esta velocidad puntual es, de hecho, una velocidad media entre dos puntos muy próximos; en la práctica es la que marca el velocímetro en un instante dado).

La tasa de variación instantánea (t.v.i.) en un punto a sería entonces la t.v.m. entre dos puntos a y $a + h$ muy próximos. Se puede obtener tomando intervalos $[a, a + h]$ cada vez más pequeños, o lo que es lo mismo, haciendo que h tienda a 0.

Esta situación se puede explicar de manera práctica en forma geométrica en el siguiente tema.

1.5 Interpretación geométrica de la derivada

El cálculo se utiliza para encontrar la razón de cambio de una función. Si la función en consideración es no lineal, su razón de cambio con respecto a su variable independiente es también la pendiente de su gráfica, medida en este caso por la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto en cuestión. Puesto que la gráfica no es una recta, su inclinación, o razón de cambio, no es constante sino que varía de un punto a otro. En el siguiente ejemplo se ilustra esta situación.

La gráfica de la siguiente figura muestra la relación entre el crecimiento poblacional de Puerto Vallarta *versus* el tiempo t medido en años. Los datos se tomaron de acuerdo con los censos de población y vivienda del INEGI, donde muestra que la población de la zona se cuadruplicó durante los últimos 30 años pasando de 63 316 habitantes en 1970 a 253 669 en el año 2000. Se determinó que la tasa de crecimiento poblacional es de 4.6% y se elaboró la gráfica.

Población inicial $P_i(1970) = 63\,316$ habitantes

Población final $P_f(2000) = 253\,669$ habitantes

Tiempo transcurrido en años $t = 30$ años

Tasa de crecimiento poblacional $i = ?$

$$P_f = P_i e^{it}$$

$$253\,669 = 63\,316 e^{30i}$$

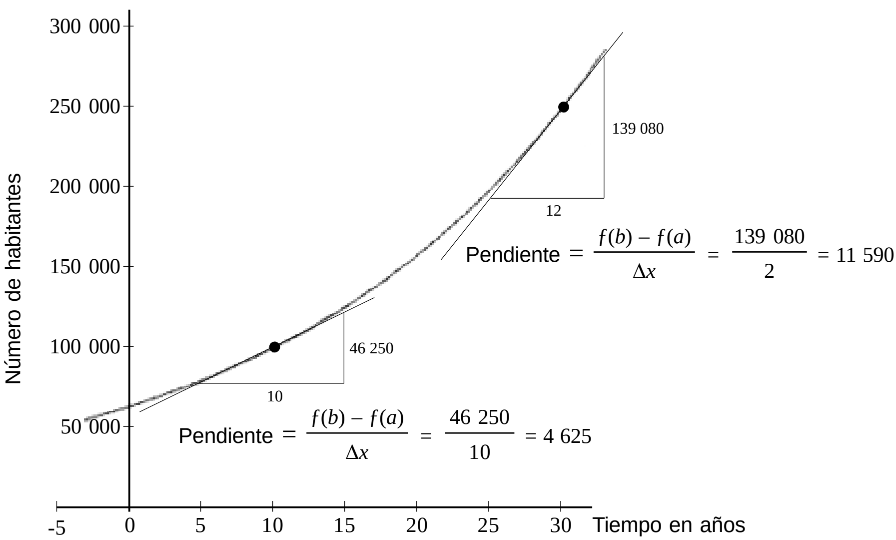
$$e^{30i} = \frac{253\,669}{63\,316}$$

$$30i = \ln \left| \frac{253\,669}{63\,316} \right| \quad \therefore \; i = 0.046$$

$$P_f = 63\,316 e^{0.046t}$$

Función de crecimiento poblacional en Puerto Vallarta

Utilizar la gráfica para estimar la razón en la que P cambia con respecto a t para los años de 1980 ($t = 10$) y 2000 ($t = 30$).



A partir de la gráfica anterior, se estima que la pendiente de la recta tangente en el punto (10, 100 000), correspondiente a $t = 10$ (1980), es aproximadamente 4 625. Es decir, cuando transcurren 10 años a partir de 1970, la población P en Puerto Vallarta *aumenta* a razón de 4 620 habitantes por cada año t.

En el punto (30, 253 500), la pendiente de la recta tangente es aproximadamente 11 590, lo cual indica que cuando han transcurrido 30 años, la población *aumenta* a razón de 11 590 habitantes por cada año que transcurre.

Con el análisis anterior nos encontramos que los problemas de optimización se pueden resolver y las razones de cambio calcularse, siempre y cuando exista un procedimiento para hallar la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto determinado.

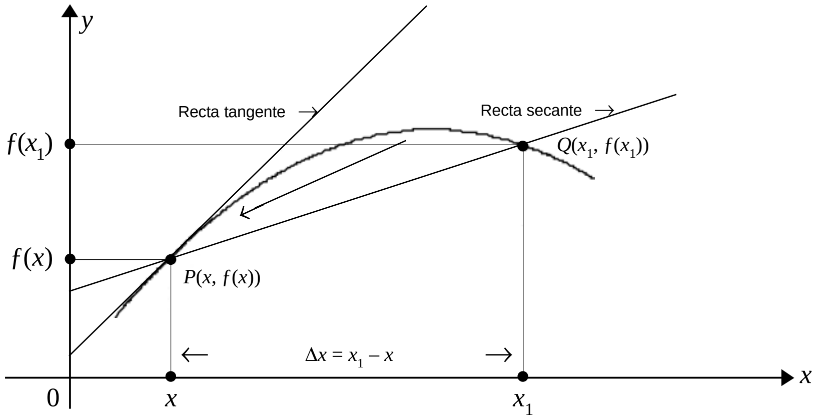
A continuación se detalla dicho procedimiento con una interpretación geométrica. El objetivo es resolver el siguiente problema general: dado un punto $P(x, f(x))$ de la gráfica de una función f, hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica en ese punto.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{Ecuación de la pendiente de una recta}$$

Como se mostró en el tema 1.1, para encontrar la pendiente de una recta se necesita de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), para aplicar la ecuación de la pendiente m. Por lo tanto, para el análisis directo de la pendiente es imposible, y es necesario emplear un método indirecto.

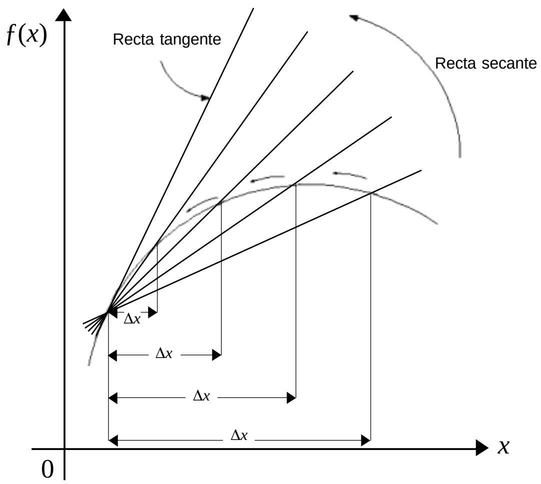
La estrategia es aproximar la tangente por medio de otras rectas (secantes) cuyas pendientes puedan calcularse directamente. En particular se considera el primer punto P donde se genera la tangencia, y se considera un segundo punto Q tomado a partir de una recta secante.

Ahora se tiene una recta secante sobre la curva que corta en los puntos P y Q. Para definir la pendiente m de la recta tangente a una curva en el punto P ubicado sobre la curva, se fija el punto P y se aproxima el punto Q hacia P.



Aproximaciones por secantes

Ahora, conforme el punto Q se mueve hacia P a lo largo de la curva, la recta secante que pasa por P tiende a convertirse en recta tangente en ese punto, y la longitud Δx tiende a ser cada vez más pequeña, es decir, Δx tiende a cero.



Este comportamiento se puede describir con más precisión, como sigue. Suponer que la curva es la gráfica de una función f definida por $y = f(x)$. Entonces, el punto P con coordenadas $P(x, f(x))$ y para el punto

$Q(x_1, f(x_1))$. Para determinar la pendiente de una recta tangente (derivada), se requiere de estos 2 puntos.

Es aquí cuando se tiene la interpretación geométrica de la derivada, en donde la secante pasa ser una tangente, esto ocurre cuando el punto Q se aproxima al punto P. El valor del incremento Δx también se reduce hasta cero. Esto es:

$$\text{si } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{entonces: } m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

$$\text{donde } x_1 - x = \Delta x \;\therefore\; m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{ahora: si } x_1 - x = \Delta x\text{; entonces: } x_1 = x + \Delta x$$

$$\text{por lo que: } m_{\text{sec}} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Para que la secante pase a una tangente, Q se aproxima a P, o lo que es igual, que el incremento de x tienda a 0 ($\Delta x \to 0$) y se calcule la pendiente en el punto P.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ecuación de la pendiente de una recta tangente a una curva $y = f(x)$ en cualquier punto de la misma (Derivada)

Los símbolos que se utilizan para indicar derivación, son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} = Df(x) = Dxf(x)$$

EJEMPLOS 1.11 Hallar la derivada de la función $y = 4x^2 + 2x - 4$ y encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función cuando $x = 1$.

a) Aplicando la definición de la derivada $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - 4 - (4x^2 + 2x - 4)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{4x^2} + 8x\Delta x + 4\Delta x^2 + \cancel{2x} + 2\Delta x - \cancel{4} - \cancel{4x^2} - \cancel{2x} + \cancel{4}}{\Delta x}$$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\cancel{\Delta x}(8x + 4\Delta x + 2)}{\cancel{\Delta x}}$ aplicando el límite cuando $\Delta x \longrightarrow 0$ $\lim_{\Delta x \to 0} 8x + 4\cancel{\Delta x} + 2 = 8x + 2$

b) Para hallar la pendiente de la tangente cuando $x = 1$, se calcula con $f'(1)$

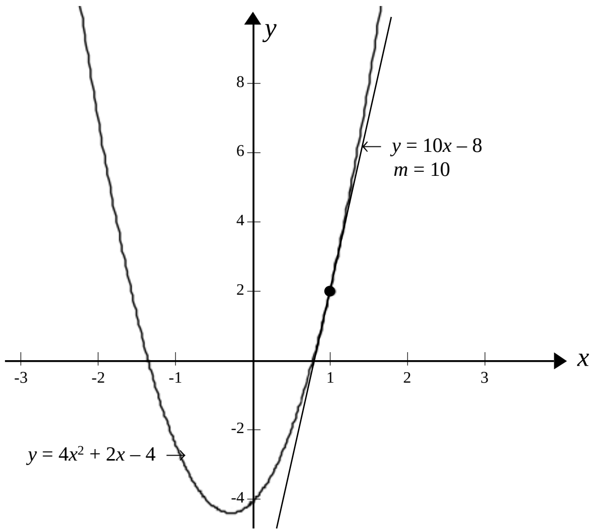
pendiente de la tangente $m = f'(1) = 8(1) + 2 = 10$

Para hallar la coordenada y del punto de tangencia, se calcula con

$f(1) = 4(1)^2 + 2(1) - 4 + 2$ se emplea la fórmula punto-pendiente $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

con $m = 10$ y $(x_1, y_1) = (1,2)$ para deducir la ecuación de la recta tangente es:

$y = 10x - 8$



La curva $y = 4x^2 + 2x - 4$ y la recta tangente $y = 10x - 8$ cuando $x = 1$,
se tiene pendiente $m = 10$

EJERCICIOS 1.4 En las siguientes funciones, calcular su derivada y encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva para cada valor especificado en la coordenada x.

1. $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$; en $x = 1$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; en $x = 2.5$

3. $y = x^2 - 4$; en $x = 2$

4. $f(x) = \sqrt{x}$; en $x = 9$

5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; en $x = 3$

6. $f(x) = x^3 - x$; en $x = -2$

7. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - x$; en $x = \dfrac{1}{2}$

8. $f(x) = 2\sqrt{x}$; en $x = 4$

1.6 Técnicas de derivación

Con la ecuación de la pendiente de una recta tangente a una curva $y = f(x)$ en cualquier punto $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right)$ se determinó como hallar la derivada de una función. Se pudo ver que hasta las funciones más sencillas este proceso de calcular su derivada es algo laborioso y con el temor de caer hasta con pequeños errores. En esta sección se estudiarán algunas fórmulas básicas que simplifican los procesos de la derivada.

1.6.1 Derivada de una potencia

La derivada de una potencia n (donde n es cualquier R), es igual a la potencia n multiplicado por x, elevado a la potencia n menos uno.

Función	Derivada
$y = x^n$	$\dfrac{dy}{dx} = x^{n-1}$

EJEMPLO 1.12 Derivar cada una de las funciones siguientes:

a) $y = x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$

b) $y = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}\ldots$ $\qquad y' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$

c) $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ $\qquad y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

1.6.2 Derivada de una constante k

La derivada de una función constante k, es igual a cero. Esto se debe a que la gráfica de una función constante $y = k$ es una recta horizontal y su pendiente es cero.

Función	Derivada
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$

Por ejemplo, si $f(x) = -4$, entonces $f'(x) = 0$

1.6.3 Derivada de una constante por una función

La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante, por la derivada de la función.

Función	Derivada
$y = k\,x^n$	$y' = k \cdot n\,x^{n-1}$

EJEMPLO 1.13 Derivar cada una de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^5$

$$y' = 3 \cdot 5x^{5-1} = 15x^4$$

b) $f(x) = 5\sqrt[3]{x^2}$

$$f(x) = 5x^{2/3}$$

$$f'(x) = 5\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}}$$

1.6.4 Derivada de una suma o resta de funciones

La derivada de la suma o resta de funciones, es igual a la derivada de cada uno de sus términos con respecto a la derivada de su variable independiente.

Función	Derivada
$f(x) + g(x) - h(x)$	$f'(x) + g'(x) - h'(x)$

EJEMPLOS 1.14 Derivar cada una de las funciones siguientes:

a) $y = 3x^2 - 5x + 3$ $\qquad y' = 3(2)x^{2-1} - 5(1)x^{1-1} + 0 = 6x - 5$

b) $f(x) = x^2 + 3x^5$ $\qquad f'(x) = 2x^{2-1} + 3(5)x^{5-1} = 2x + 15x^4$

c) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 12x - 8$

$$f'(x) = 5(3)x^{3-1} - 4(2)x^{2-1} + 12(1)x^{1-1} - 0 = 15x^2 - 8x + 12$$

d) $y = 5\sqrt[3]{x^4} - \dfrac{3}{\sqrt{x}} + 8 = 5x^{4/3} - 3x^{-1/2} + 8$

$$y' = \left(\frac{4}{3}\right)5x^{\frac{4}{3}-\frac{3}{3}} - \left(-\frac{1}{2}\right)3x^{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}} + 0$$

$$y' = \frac{20}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$y' = \frac{20}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$$

1.6.5 Derivada de un producto

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la primera función, multiplicada por la derivada de la segunda función; más la segunda función, multiplicada por la derivada de la primera función.

Función	Derivada
$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$

EJEMPLO 1.15 Derivar cada una de las funciones siguientes:

a) $y = x^2(3x + 1)$

$y' = x^2(3) + (3x + 1)2x$

$y' = 3x^2 + 6x^2 + 2x \qquad y' = 9x^2 + 2x$

b) $f(x) = (x + 2)(x - 1)$

$f'(x) = (x + 2)(1) + (x - 1)(1)$

$f'(x) = x + 2 + x - 1 \qquad f'(x) = 2x + 1$

1.6.6 Derivada de un cociente

La derivada de un cociente de funciones es igual al denominador por la derivada del numerador; menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido por el cuadrado del denominador.

Función	Derivada
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ donde $g(x) \neq 0$	$\dfrac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

EJEMPLO 1.16 Derivar cada una de las funciones siguientes:

a) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$ $\qquad y' = \dfrac{(x^2 + 2x - 15)\,(1) - \left[(x - 3)\,(2x + 2)\right]}{(x - 3)^2}$

$$y' = \frac{x^2 + 2x - 15 - 2x^2 - 2x + 6x + 6}{(x-3)^2} = \frac{-x^2 + 6x - 9}{(x-3)^2} = \frac{-(x-3)^2}{(x-3)^2} = -1$$

b) $f(t) = \dfrac{t}{t^2 - 2}$ $\qquad f'(t) = \dfrac{(t^2 - 2)\,(1) - \left[(t)\,(2t)\right]}{(t^2 - 2)^2}$

$$f'(t) = \frac{t^2 - 2 - 2t^2}{(t^2 - 2)^2} \qquad f'(t) = -\frac{t^2 - 2}{(t^2 - 2)^2}$$

1.6.7 Derivada de una función, toda elevada a una potencia n (regla de la cadena)

Es igual a la potencia, multiplicada por toda la función elevada a la potencia menos uno; asimismo, multiplicada por la derivada de la función.

Función	Derivada
$\left[f(x)\right]^n$	$n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

EJEMPLO 1.17 Derivar cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x) = (2x^4 - x)^3$ $\qquad y' = 3(2x^4 - x)^2\,(8x - 1)$

$$y' = (24x - 3)\,(2x^4 - x)^2$$

b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}$

$$y' = \frac{1}{3}\,(x^2 + 3x + 2)^{-\frac{2}{3}}\,(2x + 3) \qquad y' = \frac{2x + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3x + 2)^2}}$$

EJERCICIOS 1.5 En los siguientes problemas, calcular la derivada de las siguientes funciones por medio de técnicas de derivación.

1. $y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

2. $y = \left(\dfrac{x+2}{2-x}\right)^3$

3. $f(x) = \sqrt{x^3} + \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$

4. $y = (x^5 - 5x^2)(2x+1)$

5. $g(x) = 3\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x^3}} - \sqrt{4}$

6. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

7. $y = -\dfrac{2}{x^2} + x^{2/3} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{x^2}{4} + \sqrt{5} + \dfrac{x+2}{3}$

8. $f(x) = \dfrac{2}{x} + (2x)^{-1}$

9. $g(x) = 400\,(15 - x^2)\,(3x-2)$

10. $f(x) = \sqrt{\dfrac{4}{(x^2+x+4)^2}}$

También se puede utilizar la derivada como razón de cambio a problemas reales.

EJEMPLO 1.18 La venta (en millones de pesos) de un artículo de moda t años después de su lanzamiento al mercado está dada por la siguiente función:

$$\text{ventas}\,(t) = \frac{10t}{t^2+1}$$

a) Hallar la razón con que cambian las ventas en el instante t.
b) ¿Con qué rapidez cambian las ventas desde el momento del lanzamiento del artículo hasta después de 4 años (cuando deja de pasar de moda) de su lanzamiento al mercado?

a) La razón con la cual cambian las ventas en el instante t está dada por la derivada de ventas (t)

$$v'(t) = \frac{-10(t^2-1)}{(t^2+1)^2}$$

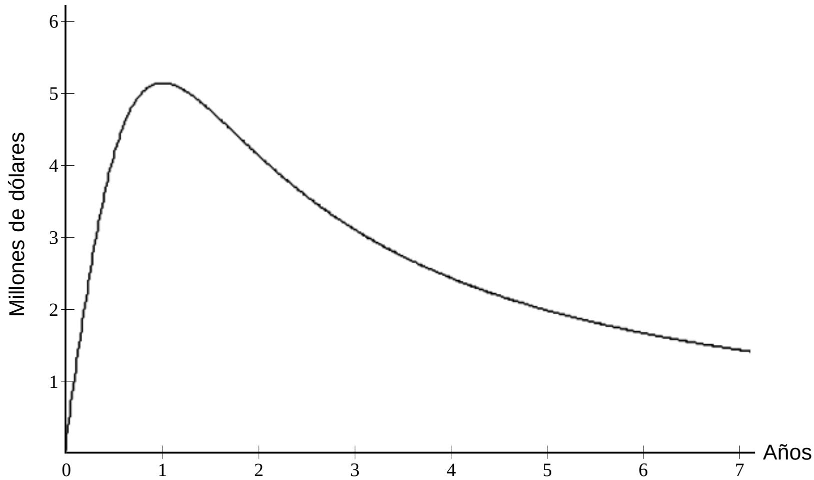
b) La razón de con qué inician las ventas al momento de colocar el producto en el mercado está dada por

$$v'(0) = \frac{-10(0^2-1)}{(0^2+1)^2} = 10$$

Es decir, aumenta a razón de \$10 millones por año. Cuatro años después del lanzamiento, las ventas cambian a razón de

$$v'(4) = \frac{-10(4^2-1)}{(4^2+1)^2} = -\frac{150}{289} = -0.51$$

Es decir, disminuye a razón de \$510 000 por año.



Gráfica de la función ventas (t). Después de un inicio espectacular, al año, las ventas comienzan a decaer

EJERCICIOS 1.6 Resolver los siguientes ejercicios:[1]

1. *Función de demanda.* La función de demanda del reloj de pulso Sicard está dada por

$$d(x) = \frac{50}{0.01x^2 + 1} \text{ en } 0 \leq x \leq 20$$

Donde x (medido en unidades de millar) es la cantidad demandada por semana y $d(x)$ es el precio unitario en dólares.

a) Hallar $d'(x)$.

b) Hallar $d'(5)$, $d'(10)$ y $d'(15)$ interpretar los resultados.

2. *Crecimiento de población*. Una gran empresa construye un complejo de casas, oficinas, tiendas, escuelas e iglesia en un terreno de 4 325 acres (1 750.27 ha) en la comunidad rural de Glen Cove. Como resultado de este desarrollo, los planificadores han estimado que la po-

[1] Ejercicios tomados de: Soo Tang Tan (2005). *Matemáticas para Administración y Economía*. México: Thomson.

blación de Glen Cove (en miles de habitantes) dentro de t años estará dada por

$$P(t) = \frac{25t^2 + 125t + 200}{t^2 + 5t + 40}$$

a) Calcular la razón de cambio de la población de Glen Cove con respecto del tiempo.

b) ¿Cuál será la población después de 10 años? ¿Con qué razón estará aumentando la población cuando $t = 10$?

1.7 Análisis marginal

Como se ha mencionado anteriormente, el cálculo es una herramienta matemática de gran importancia y tiene una infinidad de aplicaciones en diferentes disciplinas del conocimiento, como lo es Economía.

Marginal significa «extra», «adicional» o «un cambio en». La mayor parte de las elecciones o decisiones económicas ocasionan cambios en el *statu quo*. En un mundo de escasez la decisión de obtener el beneficio marginal con alguna elección especifica, incluye el costo marginal de privarse de algo adicional.

Sea x el número de unidades de algún bien de consumo. En Economía se usan frecuentemente las funciones $C'(x)$, $\boldsymbol{R}(x)$, y $U(x)$ que reciben nombres especiales de costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal respectivamente, y se definen a continuación:

El costo total se define como la suma de los costos fijos más los costos variables.

$$\text{Costo total: } C(x) = C_{\text{fijos}} + C_{\text{variables}}$$

El costo promedio c, se define como el costo total dividido entre el número de unidades producidas.

$$c(x) = \frac{C(x)}{x} = \text{costo promedio de producción de una unidad}$$

Se define como costo marginal al cambio (razón de cambio) en el costo total debido a un incremento de unidad en la producción, y se representa como la derivada del costo total. También se representa como el costo extra unitario por cada unidad producida de más.

$$C'(x) = \text{costo marginal}$$

La percepción por la venta de x unidades se define como el ingreso $R(x)$, y será, el precio por unidad multiplicado por la cantidad de unidades vendidas:

$$R(x) = px = \text{ingreso}$$

Se define como ingreso marginal al cambio (razón de cambio) en el ingreso total debido a un incremento de unidad en la venta, y se representa como la derivada del ingreso total:

$$R'(x) = \text{ingreso marginal}$$

La utilidad es definida como la diferencia entre el ingreso total menos el costo de producción, y se representa mediante la siguiente ecuación:

$$U(x) = R(x) - C(x) = \text{utilidad}$$

Existen más conceptos marginales que se presentan en el análisis económico.

EJEMPLO 1.19 En Talpa de Allende, un productor de rompope tiene un costo fijo (renta, luz, agua, mano de obra, etc.) mensual de $\$20\,000$ pesos, un costo de producción de $\$15$ por botella y un precio de venta de $\$25$ por unidad.

a) Calcular $C(x)$, $c(x)$, $R(x)$ y $U(x)$.

b) Determinar los valores del inciso (a) para una producción de $1\,500$ botellas.

c) ¿Cuántas botellas deben elaborarse y venderse para no salir perdiendo?

a) El costo de producción de x unidades es $15x$. Como hay además un costo fijo mensual de $\$20\ 000$, el costo mensual para x unidades es:

$$C(x) = 15x + 20\ 000,$$

Así mismo, para el costo promedio es: $c(x) = \dfrac{C(x)}{x} = 15 + \dfrac{20\ 000}{x}$

Ingreso por la venta de x botellas a $\$25$ cada una: $R(x) = 25x$

y la utilidad en la elaboración de x botellas de rompope es:

$$U(x) = R(x) - C(x) = 25x - (15x + 20\ 000)$$

$$U(x) = 10x - 20\ 000$$

b) Sustituyendo el número de botellas $x = 1\ 000$ en las funciones anteriores,

$C(1\ 500) = 15(1\ 500) + 20\ 000 = 44\ 500$ costo total de fabricación de $1\ 500$ botellas

$c(x) = 15 + \dfrac{20\ 000}{1\ 500} = 28.33$ costo promedio de fabricación por botella

$R(1\ 500) = 25(1\ 500) = 37\ 500$ ingreso total por la venta de $1\ 500$ botellas

$U(1\ 500) = 10(1\ 500) - 20\ 000 = -5\ 000$ utilidad total de $1\ 500$ botellas

En la producción y venta sólo de $1\ 500$ botellas de rompope, el fabricante se enfrentará con una pérdida en las utilidades de $\$10\ 000$. Nótese que el fabricante tendría una pérdida de $\$5\ 000$ por mes, sí se fabrican y venden solamente $1\ 500$ unidades.

c) Para evitar pérdidas, se iguala la función a cero utilidad, es decir $10x - 20\ 000 = 0$. Resolviendo para x:

$$x = \frac{20\ 000}{10} = 2\ 000$$

Entonces, para salir en «tablas» (sin ganancias y sin pérdidas), el productor logrará el punto de equilibrio en la producción y venta de $2\ 000$ botellas de rompope al mes.

EJERCICIOS 1.7 Resolver los siguientes ejercicios de análisis marginal:

1. La ecuación $C(x) = 1'500\ 000 + \dfrac{x^2}{20}$, representa el costo en la producción de x unidades, que determinada fábrica vende según la siguiente ecuación de demanda:

$$x = 200\ 000 - 10p$$

a) ¿Cuál es el costo promedio de producir $10\ 000$ unidades?

b) ¿Cuál es el incremento promedio en los costos, sí se pasa de 10 000 a 12 000 unidades producidas?

c) ¿Cuál es el costo marginal al producir 10 000 unidades?

d) ¿Cuál es el ingreso marginal al vender 10 000 unidades?

2. *Razón de cambio de las funciones de costo*.[2] Supóngase que el costo total por semana, en dólares, de producción de x refrigeradores por la compañía Polaraire está dado por la función del costo total

$$C(x) = 8\,000 + 200x - 0.2x^2$$

a) ¿Cuál es el costo real de la producción del refrigerador 251?

b) ¿Cuál es la razón de cambio del costo total con respecto de x cuando $x = 250$?

c) Comparar los resultados obtenidos en a y b.

3. *Función de costo marginal*.[3] Una subsidiaria de la compañía Electra fabrica una calculadora de bolsillo programable. El costo total diario de producción de las calculadoras programables está dado por $C(x) = 0.0001x^3 - 0.08x^2 + 40x + 5\,000$ dólares, donde x representa el número de calculadoras producidas.

a) Hallar la función de costo promedio.

b) Hallar la función de costo promedio marginal cuando $x = 500$.

c) Trazar la gráfica de la función de costo promedio.

4. *Función de ingreso marginal*.[4] Suponer que la relación entre el precio unitario p en dólares y la cantidad de demanda x del sistema de sonido de Acrosonic está dada mediante la ecuación

$$p = -0.02x + 400 \text{ en } 0 \leq x \leq 2\,000$$

a) Hallar la función de ingreso $R(x)$.

[2] *Ibidem*.
[3] *Ibidem.*
[4] *Ibidem.*

b) Hallar la función de ingreso marginal $R'(x)$.

c) Calcular $R'(2\,000)$.

5. *Función de utilidad marginal*.[5] Con base en el ejercicio 3, suponer que el costo de producción de x unidades del sistema de sonido modelo F de Acrosonic es $C(x) = 100x + 200\,000$ dólares.

a) Hallar la función de utilidad $U(x)$.

b) Hallar la función de utilidad marginal $U'(x)$.

c) Calcular $U'(2\,000)$.

d) Trazar la gráfica de la función de utilidad $U(x)$.

1.8 Derivadas de orden superior

En el estudio de la derivada se analizó la rapidez con que se incrementa el número de habitantes por año en Puerto Vallarta (razón de cambio). En esta sección se analizará la razón de cambio de otra razón de cambio de una función. En problemas de física, se sabe que la aceleración es la derivada de la velocidad y ésta a su vez, es la derivada de la distancia con respecto al tiempo. Las unidades producidas en un tiempo t es la derivada de la función del rendimiento de un trabajador.

La razón de cambio de una función $f(x)$ con respecto a x está dada por su derivada $f'(x)$. De igual manera, la razón de cambio de la razón de cambio $f'(x)$ está dada por su derivada $f''(x)$. A esta acción de calcular la derivada de la derivada, se le conoce como la *segunda derivada de la función.* Usando la notación de Leibniz para representar la segunda derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

Esta segunda derivada es de orden superior. Se pueden calcular derivadas de cualquier orden, como se comentó anteriormente: la se-

[5] *Ibidem.*

gunda derivada es la derivada de la primera derivada, la tercera derivada, es la derivada de la segunda derivada,…, la n-ésima derivada, es la derivada de la n-ésima – 1 derivada, y así sucesivamente.

La segunda derivada se utilizará en la segunda unidad, para determinar la concavidad o convexidad de las gráficas (máximos o mínimos).

Las siguientes son las derivadas de orden superior y sus notaciones:

primera derivada de una función: $y', f'(x), \frac{dy}{dx}$

segunda derivada de una función: $y'', f''(x), \frac{d^2y}{dx^2}$

tercera derivada de una función: $y''', f'''(x), \frac{d^3y}{dx^3}$

(n-ésima – 1) derivada de una función: $y''', f'''(x), \frac{d^{(n\text{-ésima} -1)}y}{dx^{(n\text{-ésima} -1)}}$

(n-ésima) derivada de una función: $y''', f'''(x), \frac{d^{(n\text{-ésima})}y}{dx^{(n\text{-ésima})}}$

En seguida se presentan unos ejemplos acerca de las derivadas de orden superior.

EJEMPLO 1.20 Hallar la segunda y tercera derivada respectivamente de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 3x + 7$ $\qquad f'(x) = 20x^3 - 6x - 3$
   $f''(x) = 60x^2 - 6$ $\qquad f'''(x) = 120x$

2. $y = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ $\qquad y = (x^2 + 1)^{-2}$ aplicando la regla de la cadena

   $y' = -2(x^2 + 1)^{-3}(2x) = -4x(x^2 + 1)^{-3}$ $\qquad y'' = 12x(x^2 + 1)^{-4}(2x) = 24x^2(x^2 + 1)^{-4}$

   $y''' = -96x^2(x^2 + 1)^{-5}(2x) = -192x^3(x^2 + 1)^{-5} = -\frac{192x^3}{(x^2+1)^{-5}}$

3. $f(x) = \dfrac{5x+3}{(x+1)^2} = (5x+3)\,(x+1)^{-2}$ aplicando la regla del producto:

$$f'(x) = (5x+3)\left[-2(x+1)^{-3}\,(1)\right] + (x+1)^{-2}\left[5\right] = -\frac{2(5x+3)}{(x+1)^3} + \frac{5}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2(5x+3)+5(x+1)}{(x+1)^3} = \frac{-10x-6+5x+5}{(x+1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{-5x-1}{(x+1)^3} = -\frac{(5x-1)}{(x+1)^3}$$ aplicando la regla del cociente:

$$f''(x) = -\frac{(x+1)^3\,(5) - \left[(5x+1)\,3\,(x+1)^2\right]}{\left[(x+1)^3\right]^2} = \frac{10x^3+18x^2+6x-2}{(x+1)^6}$$

aplicando la regla del cociente:

$$f'''(x) = \frac{(x+1)^6\,(30x^2+36x+6) - \left[(10x^3+18x^2+6x-2)\,6\,(x+1)^5\right]}{\left[(x+1)^6\right]^2}$$

$$f'''(x) = \frac{(x+1)^5\left[(x+1)\,(30x^2+36x+6) - 6\,(10x^3+18x^2+6x-2)\right]}{(x+1)^{12}}$$

$$f'''(x) = \frac{-30x^3-42x^2+6x+18}{(x+1)^7}$$

EJEMPLO 1.21 En una maquiladora de pantalones, se realizó un estudio de eficiencia y se determinó que un empleado promedio desde su llegada a la planta (7:00 a.m.), hasta su salida (15:00 hrs.), maquila (produce) $P(t) = -2t^3 + 6t^2 + 20t$ pantalones, después de un intervalo de tiempo t.

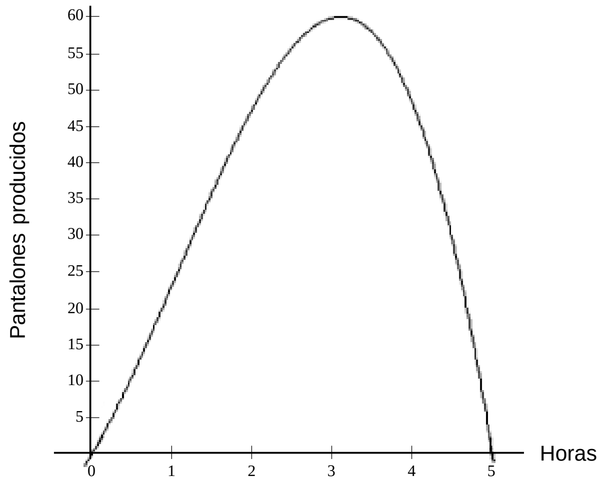
a) ¿Cuál será el rendimiento del empleado 2 horas después de su llegada (9:00 a.m.)?

b) ¿Cuál es la razón de cambio del rendimiento del empleado, las 10:00 a.m.?

a) La función de rendimiento es la derivada de la función de producción, con lo cual se tiene

$$P'(t) = -6t^2 + 12t + 20$$

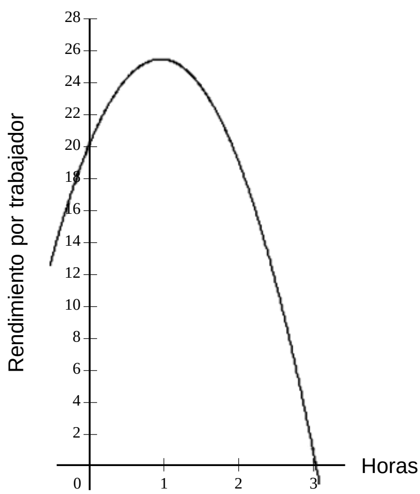
donde a 2 horas después de su llegada $P'(2) = -6(2)^2 + 12(2) + 20 = 20$ pantalones producidos a las 9:00 a.m.



$P(t) = -2t^3 + 6t^2 + 20t$ función de producción de la maquiladora

b) La razón de cambio (derivada) del rendimiento de un empleado es la segunda derivada de la función de producción

$$P''(t) = -12t + 12$$

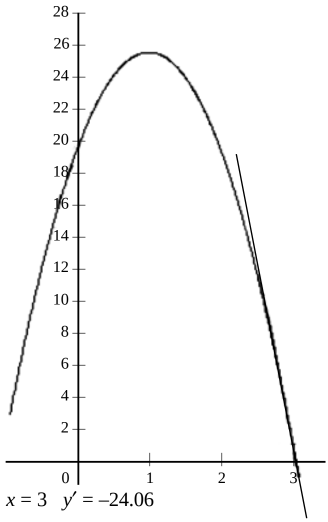


$P'(t) = -6t^2 + 12t + 20$ función de rendimiento de un empleado promedio

A las 10:00 a.m. $(t = 3)$, la razón de cambio del rendimiento es:

$$Q''(3) = -12(3) + 12 = -24 \text{ pantalones}$$

El signo menos indica que el rendimiento del empleado disminuye a razón de 24 pantalones a las 10:00 a.m. El empleado ve disminuido su desempeño 3 horas después de haber llegado, esperando la hora de la comida (12:00 horas).



Pendiente de la recta tangente en $x = 3$ es $m = -24$

EJERCICIO 1.8 Resolver el siguiente ejercicio:

1. *Estudio de eficiencia*. Un estudio de eficiencia del turno matutino en cierta fábrica revela que un trabajador promedio que llega al trabajo a las 8:00 a.m. habrá producido $Q(t) = -t^3 + 8t^2 + 15t$ unidades t horas más tarde.

a) Calcular la tasa de producción del trabajador a las 9:00 a.m.

b) ¿A qué razón cambia la tasa de producción del trabajador con respecto al tiempo a las 9:00 a.m.?

1.9 Derivadas de funciones exponenciales

El número e, tiene diversas aplicaciones de las matemáticas (ingeniería, biología y economía), desde determinar el crecimiento de bacterias en un cultivo, el pago de un crédito a una tasa de interés compuesto continuamente, el crecimiento poblacional de una localidad, etc. El valor e se obtiene con la siguiente ilustración:

Por lo general, cuando se pide prestado una determinada cantidad p_i con una tasa de interés del i % anual, el pago p_f al final del año será

$p_f = p_i + p_i \cdot i$ pago final = prestamo inicial + interés del pago inicial

$$p_f = p_i\,(1 + i)$$

El interés que se paga en esta ecuación se le denomina *interés simple*.

Ahora, sí durante el tiempo de un préstamo, el interés resultante se suma al capital y al mismo tiempo está nueva cantidad genera interés por si mismo, se le denomina *interés compuesto*.

Las tasas de interés por lo general se definen en cortos plazos de 30 días, tres, seis o nueve meses. Por ejemplo, si se pide prestado $pi = 100$ con una tasa de interés del 21% compuesto en 4 periodos anuales (trimestralmente), la cuenta al final del primer periodo trimestral será $100\left(1 + \frac{0.21}{4}\right) = 100(1.0525) = \$105.25$, donde $\frac{0.21}{4}$ representa el interés durante el periodo.

El monto que habrá en la cuenta al final del segundo trimestre será

$$[100(1.0525)](1.0525) = 100(1.0525)^2 = \$110.77$$

Continuando con el tercer periodo, la cuenta será de

$$100(1.0525)^3 = \$116.59$$

Así, los intereses se van integrando al capital en cada fin de periodo, hasta llegar al n-*ésimo* periodo, es $100(1.0525)^n$

Esta relación se interpreta de la siguiente manera:

$$p_f = p_i\left(1 + \frac{i}{m}\right)^n$$

donde: m = periodo de inversión

n = número de periodos

Si t es el número de años de inversión, entonces el número de periodos de interés es $n = mt$

$$p_f = p_i\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}$$

Así como el interés se compone en diferentes periodos al año (mensuales, trimestrales, semestrales, etc.), ahora se analiza qué sucede si se compone continuamente (días, horas, segundos, décimas de segundos, etc.). Aquí el valor de los periodos se incrementa sin límite $(m \to \infty)$. La relación queda

$$\mathrm{p_f} = \mathrm{p_i}\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt\left(\frac{i}{i}\right)} = \left[\mathrm{p_i}\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{\frac{m}{i}}\right]^{ti}; \text{ donde } x = \frac{m}{i}$$

$$\mathrm{p_f} = \left[\mathrm{p_i}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{ti}$$

Si el número de periodos crece sin límite, entonces la relación $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ donde $x \to \infty$ toma los siguientes valores

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$	2	2.5937	2.7048	2.7169	2.7181	2.7183	2.7182

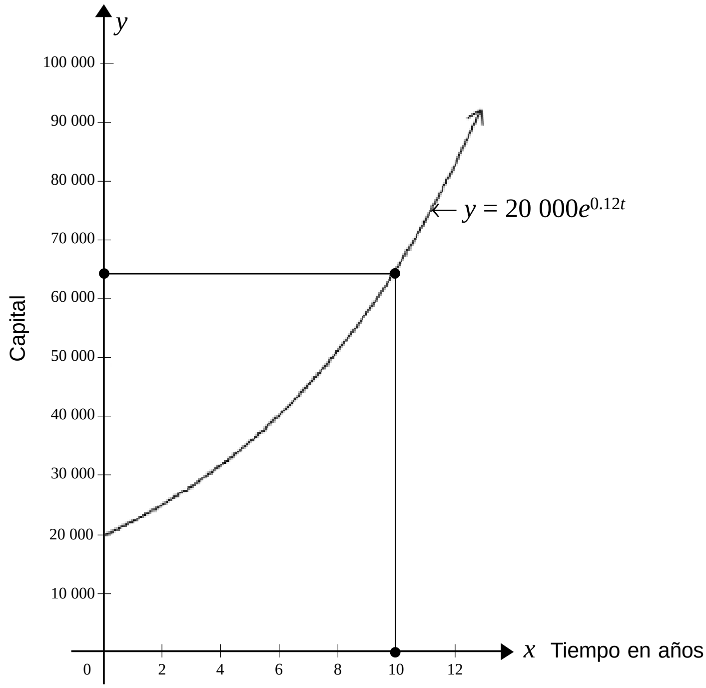
En el siguiente tabulador se aprecia que a medida que x tiende sin límite, la relación $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ tiende a un valor finito, que se representa mediante el símbolo e. De esta manera, la relación del interés compuesto queda indicada como

$$\mathrm{p_f} = \mathrm{p_i}e^{it}$$

Para estudiar los planes de inversión que una cuenta de ahorros generará, es importante conocer la tasa el cuál reditúa interés a la inversión, el tiempo en que se mantiene el depósito en la inversión, así como el capital inicial que se desea invertir en el tiempo cero $t = 0$.

En la siguiente gráfica se ilustra como el capital se incrementa rápidamente, conforme avanza el tiempo. Permite observar el comportamiento del capital cuando se hace una inversión de \$20 000.00 que reditúa el 12% de interés compuesto continuamente.

Al inicio la rapidez de cambio en $t = 0$ es de $\$20\,000.00$, al cabo de 10 años la rapidez de incremento en el capital es de $\$66\,402.33$ y esta rapidez se sigue incrementando conforme pasa el tiempo, puesto que crece de manera exponencial.



Gráfica de la función $y = 20\,000e^{0.12t}$

Para analizar los modelos matemáticos que contienen funciones exponenciales y logarítmicas se tiene las reglas de derivación de cada función.

La derivada de una función exponencial con base en e es igual a la misma función.

Función	Derivada
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$

EJEMPLO 1.22 Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2e^x$ usando la regla del producto

$$f'(x) = x^2(e^x) + e^x(2x) = xe^x(x + 2)$$

b) $g(t) = (e^t + 2)^{3/2}$

$$g'(t) = \frac{3}{2}(e^t + 2)^{\frac{1}{2}}(e^t)$$

$$g'(t) = \frac{3e^t\sqrt{(e^t + 2)}}{2}$$

c) $y = e^{2x}$ $\quad y' = e^{2x}(2)$ $\quad y' = 2e^{2x}$

d) $f(x) = e^{-3x}$ $\quad f'(x) = e^{-3x}(-3)$ $\quad f'(x) = -3e^{-3x}$

e) $g(x) = e^{2t^2+t}$ $\quad g'(x) = e^{2t^2+t}(4t + 1)$

f) Si $V(t)$ dólares es el valor de una maquinaria t años después de su compra, entonces $V(t) = Ce^{-0.15t}$, donde C es el costo del equipo al adquirirlo. Si el equipo se compró en $10 000.00 ¿Con qué rapidez cambiará el valor contable de la maquinaria dentro de 4 años?

La depreciación dentro de t años será

$$V(t) = 10\,000e^{-0.15t}$$

$$V'(t) = 10\,000(-0.15)e^{-0.15t}$$

$$= -1\,500e^{-0.15t}$$

Por lo que, la razón de cambio del valor contable de equipo dentro de 4 años será

$$V'(4) = -1\,500e^{-0.15(4)} = -823.21$$

Esto quiere decir que disminuye a razón de $823.21 al cuarto año, aproximadamente.

Ahora se analizan las derivadas de funciones logarítmicas (hay qué saber que la operación inversa de e es el $\ln$).

Función	Derivada
$f(x) = \ln \lvert x \rvert$	$f'(x) = \frac{1}{x}$ donde $x \neq 0$

Calcular la derivada de cada una de las funciones siguientes:

1. $f(x) = x \ln x$ por la regla del producto: $f'(x) = x(\frac{1}{x}) + \ln x\,(1) = 1 + \ln x$

2. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad y' = \dfrac{x(\frac{1}{x}) - \ln x(1)}{x^2}$ $\quad y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

EJERCICIOS 1.9 Resolver los ejercicios de las funciones exponenciales y logarítmicas siguientes:

1. *Uso de Internet.*[6] Según la Internet Society, las conexiones a la red están proliferando a una razón cada vez más creciente. El número de computadoras huésped (en millones) se estima en $N(t) = 3.45e^{0.64t}$ en $0 \leq t \leq 6$ en t años ($t = 0$ corresponde al principio de 1994).

¿Con qué rapidez aumentó la cantidad de computadoras huésped al principio de 1996? ¿Y de 2000?

2. *Interés compuesto.* Suponer que se piden prestados a una casa crediticia \$135 335.00 a una tasa de interés del 25% compuesto continuamente, ¿Cuál es la cantidad que se debe liquidar en el transcurso de 8 años?

[6] *Ibidem*.

UNIDAD II

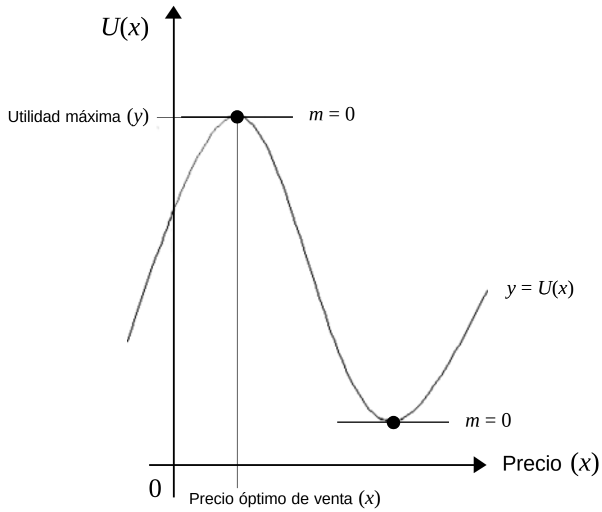
Aplicación de la derivada

2.1 Introducción

El hecho de que la interpretación geométrica de la derivada es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto determinado es muy útil para el trazado de las gráficas de funciones. Por ejemplo, cuando la derivada es cero para un valor dado de x (variable independiente) la tangente que pasa por dicho punto tiene pendiente cero y en consecuencia, es paralela al eje x. También, se pueden establecer los intervalos en los que la gráfica está sobre o debajo de la tangente.

Para cualquier empresa que se maneja bajo la economía de mercado, su objetivo central es el de maximizar utilidades y minimizar costos. Es aquí, en el que, una de las aplicaciones del cálculo diferencial es la de optimizar funciones para incrementar utilidades de venta o reducir costos de producción.

Por ejemplo, si se tiene una función de utilidad de venta $U(x)$ de determinado producto y se desea conocer el precio óptimo de venta (coordenada x) para obtener una máxima utilidad. Para ello habrá que definir el precio donde oscilará el producto, entre el más económico y el más caro (intervalo de x). La función se representa mediante la gráfica de utilidad *versus* precio de venta del producto.



Se puede apreciar que el precio óptimo de venta es aquel cuando la coordenada de precio-utilidad, coincide con la parte más alta de la gráfica.

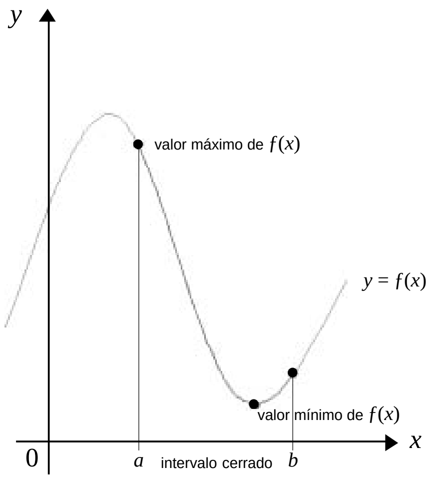
En este ejemplo relativamente sencillo, la cima de la gráfica puede caracterizarse en términos de rectas que son tangentes a la gráfica. En particular, la cima es el único punto de la gráfica en el cual la recta tangente es horizontal, es decir, donde la pendiente de la tangente es cero. A la izquierda de la cima las pendientes de las tangentes son positivas, y viceversa.

En la mayor parte de los problemas prácticos de optimización, el objetivo consiste en hallar el máximo o el mínimo absoluto de una función dentro de algún intervalo.

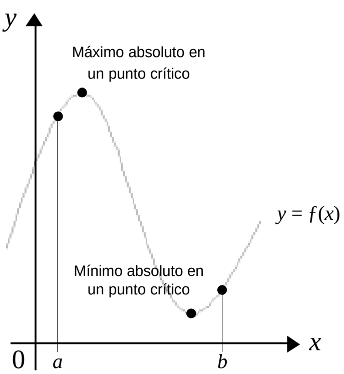
2.2 Máximos y mínimos en intervalos cerrados

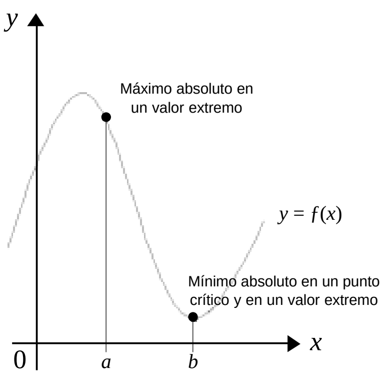
Una función posee un valor máximo y un valor mínimo (valores absolutos) dentro de un intervalo cerrado $[a, b]$. El máximo absoluto de una función en un intervalo es el valor mayor de la función en dicho intervalo. El mínimo absoluto es el valor menor de la función.

Con frecuencia los valores absolutos coinciden con los valores extremos o en los puntos críticos, pero no siempre. Por ejemplo, en la siguiente figura, en el intervalo cerrado $[a, b]$, el valor máximos absoluto se encuentra en un valor extremo del intervalo $x = a$, no así el valor mínimo absoluto que se encuentra entre los valores extremos $a \leq x \leq b$.



Como se analizó en la figura anterior, un valor absoluto se puede localizar dentro del intervalo o en sus puntos extremos. Estos se pueden localizar dentro del intervalo $a \leq x \leq b$ en los puntos de inflexión (puntos críticos) de la gráfica o en los extremos (valores extremos) de dicho intervalo $x = a$ y $x = b$.





A continuación se analizará cómo calcular los valores absolutos de las funciones en intervalos tanto cerrados como abiertos.

2.2.1 Máximos y mínimos en intervalos cerrados

Para ilustrar con un ejemplo se realiza paso a paso el siguiente procedimiento sencillo en la función $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 3$ para localizar e identificar sus valores absolutos en el intervalo cerrado $[-4, 0]$.

Primeramente se deriva la función $f(x)$ e iguala a cero para definir los puntos críticos en el intervalo $[-4, 0]$.

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9$$

$$-3x^2 - 6x + 9 = 0 \text{ factorizando se tiene:}$$

$$(-3x - 9)(x - 1) = 0$$

$$x = \frac{9}{-3} = -3 \text{ primer punto crítico}$$

$$x = 1 \text{ segundo punto crítico}$$

Una vez determinado, los valores críticos se calculan para $f(x)$ los valores $x = -3$ y $x = 1$ así como los valores extremos del intervalo $x = -4$ y $x = 0$.

$$f(-4) = -(-4)^3 - 3(-4)^2 + 9(-4) + 3 = -17$$

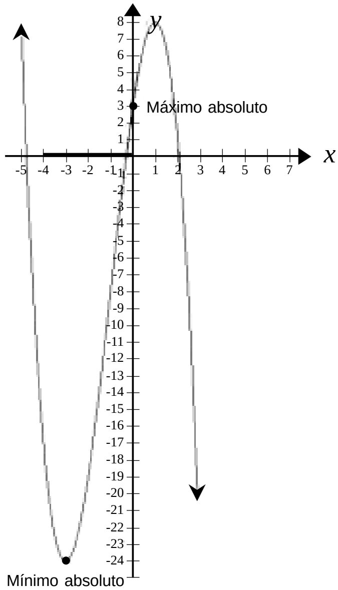
$$f(-3) = -(-3)^3 - 3(-3)^2 + 9(-3) + 3 = -24$$

$$f(0) = -(0)^3 - 3(0)^2 + 9(0) + 3 = 3$$

$$f(1) = -(1)^3 - 3(1)^2 + 9(1) + 3 = 8$$

Se seleccionan los valores mayor y menor de $f(x)$ obtenidos anteriormente. Éstos serán el máximo y el mínimo absolutos, respectivamente.

Comprobando estos resultados se concluye que el mínimo absoluto en el intervalo $[-4, 0]$ es en la coordenada $(-3, -24)$ por ser el de menor valor. El máximo absoluto sería $x = 1$, $y = 8$, pero la coordenada $x = 1$ se encuentra fuera del intervalo $[-4, 0]$, por lo que, pasa al siguiente con mayor valor $x = 0$, $y = 3$ que será el máximo absoluto. Esto se puede observar en la siguiente gráfica:



EJERCICIOS 2.1 Encontrar el máximo y el mínimo absoluto de la siguientes funciones en los intervalos especificados.

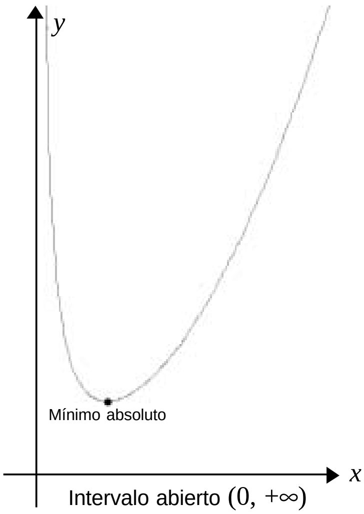
1. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 2$; en $[-3, 1]$
2. $f(x) = (x^2 - 2)^2$; en $[-2, 2]$

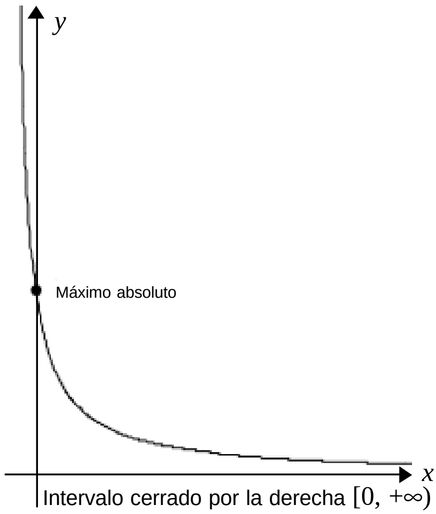
2.2.2 Máximos y mínimos en intervalos abiertos

Cuando se desea calcular los valores absolutos en un intervalo que no es cerrado, se utiliza un procedimiento diferente al anterior, puesto que no se sabe con certeza si la función en dicho intervalo contenga un valor máximo, un valor mínimo o ambos.

Por otra parte, si el intervalo es cerrado por la derecha o cerrado por la izquierda, se tendrá un valor absoluto en dicho extremo.

En las siguientes figuras se ilustran dos posibilidades de funciones en intervalos abiertos.





Para encontrar los máximos y mínimos de una función continua en un intervalo abierto, se deriva $f(x)$ y se determinan los puntos críticos, así mismo, si existen los valores extremos pertenecientes al intervalo.

Se puede determinar los valores extremos de $f(x)$ dentro del intervalo a través del concepto de la segunda derivada.

Se deriva $f'(x)$ y se sustituyen los puntos críticos. Si el resultado es mayor a cero ($f''(x) > 0$) el punto crítico es un mínimo. Si el resultado es menor a cero ($f''(x) < 0$) el punto crítico es un mínimo. También se determina dibujando la gráfica.

EJEMPLO 2.1 Hallar el máximo y el mínimo absolutos (si existe) de la función $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$; en $(0, +\infty)$

Se deriva $f(x)$ y se iguala a cero para determinar los puntos críticos

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + 1$$

$$-\frac{2}{x^3} + 1 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{2}$$

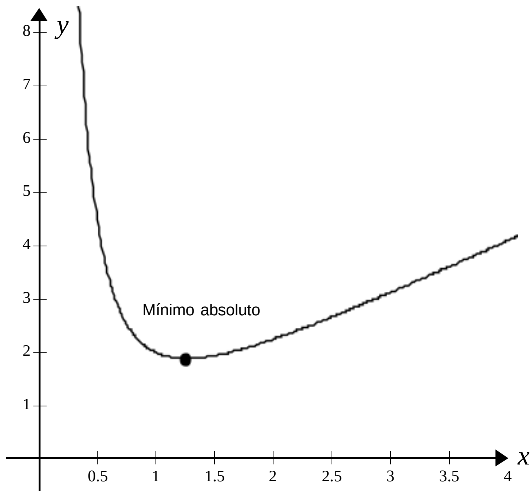
$$x = 1.25 \text{ punto crítico}$$

Como solamente se tiene un punto crítico y no se cuenta con algún valor extremo, se define su valor absoluto con el criterio de la segunda derivada.

$f''(x) = \frac{6}{x^4}$, sustituyendo el punto crítico:

$f''(1.25) = \frac{6}{(1.25)^4} = 2.45 > 0$ por lo que este valor es un mínimo

También se puede determinar su valor absoluto con la gráfica de la función.



Mínimo absoluto en el intervalo $(0, +\infty)$

EJERCICIOS 2.2 Encontrar el máximo y el mínimo absoluto (si existen) de las siguientes funciones en los intervalos establecidos.

1. $y = \frac{1}{x^2} + x^2$; en el intervalo $(-\infty, \infty)$
2. $f(x) = \frac{x-2}{(x^2-4)}$; en el intervalo $x \geq 0$
3. $y = x^3$; en el intervalo $(-2, 2)$
4. $y = -x^2 + 3x$; en el intervalo $x > 0$
5. $f(x) = \frac{1}{x+3} + 3$; en el intervalo $x \geq 3$
6. $y = \frac{1}{x}$; en el intervalo $(-\infty, \infty)$

2.3 Aplicaciones en las áreas económico-administrativas

En el tema 1.7 se manejaron funciones de análisis marginal, en la cual se le asignaron letras para representar las funciones de costo marginal con C', ingreso marginal $\boldsymbol{R}(x)$, utilidad marginal $U(x)$, etc. En este tema se estudiará cómo plantear funciones matemáticas (asignándole una letra para representarla) de problemas comunes dentro del área económico-administrativas, resolverlas y poder encontrar soluciones óptimas.

En algunos problemas es necesario modelar $f(x)$ que se quiere optimizar y ésta se expresa en términos de dos variables.

Posteriormente se define el intervalo o periodo donde oscilara la función $f(x)$ que se representa en el eje de las x, donde la función tendrá una interpretación práctica sólo cuando la variable está en cierto intervalo.

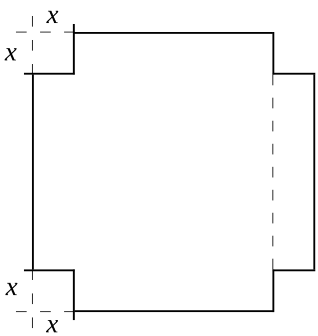
Una vez que se tiene la función $f(x)$ definida en un intervalo, para optimizarla se le da solución con las técnicas matemáticas de derivación que se analizaron en temas anteriores.

EJEMPLOS 2.2 Resolver los siguientes problemas prácticos de optimización.

1. Se desea construir cajas sin tapas a partir de una pieza cuadrada de material de $a \times a$ cm de lado, cortando cuadrados iguales de las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Determinar la longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para obtener una caja cuyo volumen sea el mayor posible.

Se calcula el volumen de un sólido que es el producto de ancho, largo y alto:

$$\text{Volumen} = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{alto}$$

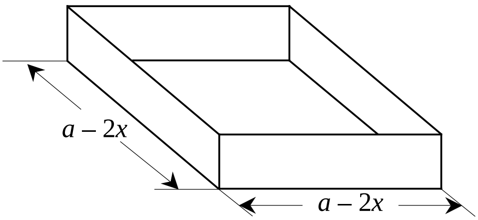


Para la figura tenemos que:

largo = $(a - 2x)$

ancho = $(a - 2x)$

alto = x



El volumen de la caja está definido en función de x:

$$V(x) = (a - 2x)\ (a - 2x)\ x$$
$$= (a - 2x)^2\ x$$
$$= a^2x - 4ax^2 + 4x^3$$

donde el corte de las esquinas se encuentra en el intervalo $0 \leq x \leq ½a$

Derivando la función del volumen con respecto a x, e igualando a cero para determinar sus puntos críticos:

$$V'(x) = a^2 - 8ax + 12x^2$$

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$a = 12$, $b = -8a$ y $c = a^2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-8a) \pm \sqrt{(-8a)^2 - 4(12)\ (a^2)}}{2(12)}$$

$$= \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \frac{8a \pm \sqrt{16a^2}}{24}$$

$$= \frac{8a \pm 4a}{24} \qquad x_1 = \frac{12a}{24} = \frac{a}{2} \qquad x_2 = \frac{4a}{24} = \frac{a}{6}$$

Puntos críticos: $x_1 = \dfrac{a}{2} \quad x_2 = \dfrac{a}{6}$

Si se hace un corte de ½ a de la caja en una esquina y ½ a en la esquina opuesta, se obtendrá un mínimo de volumen, puesto que no hay caja (volumen mínimo).

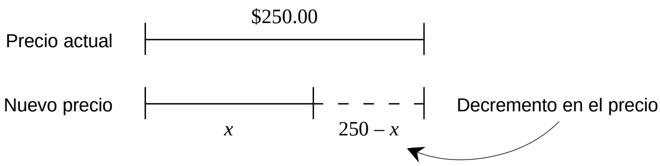
Si se hace un corte de $^1/_6$ a en cada esquina se obtendrá una caja con un máximo de volumen.

2. La boutique de ropa *Fashion* ubicada en el malecón de Puerto Vallarta ha estado vendiendo mensualmente 300 piezas de un tipo especial de guayabera a un precio de venta de $250, cuando la consiguen a un costo de $150. Un muestreo de mercado indica que por cada 10% de descuento en el precio de venta, el número de guayaberas vendidas se incrementa a 15 por mes. Determinar el precio de venta en las guayaberas en el cual la boutique deberá vender las guayaberas para obtener una utilidad máxima.

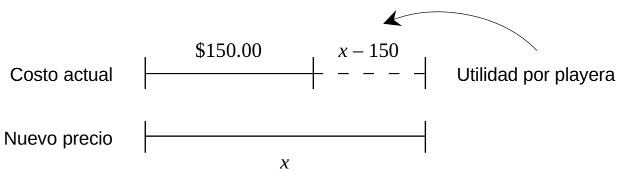
El problema está dado en determinar la máxima utilidad en función del precio de las guayaberas.

Utilidad = (guayaberas vendidas al mes) (utilidad por guayabera) en $150 \leq x \leq 250$

Guayaberas vendidas al mes = $[300 + 15$ (decremento al precio)$]$



Utilidad por playera = utilidad del nuevo precio de las playeras = $(x - 150)$

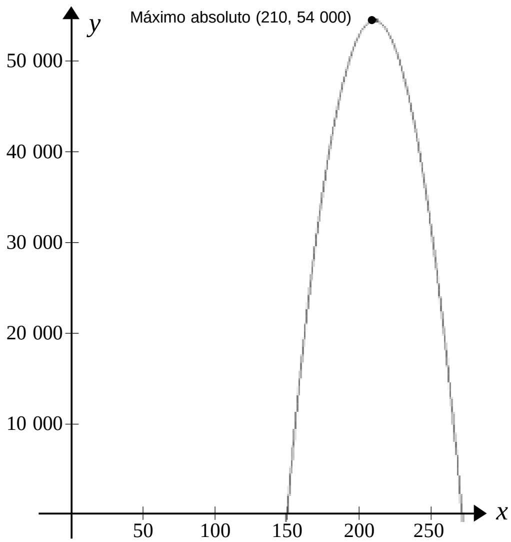


La función de utilidad respecto al precio de venta es:

$$U(x) = [300 + 15(250 - x)][(x - 150)]$$

$$U(x) = (4\,050 - 15x)\,(x - 150)$$

Derivando la función de utilidad e igualando a cero para determinar los puntos críticos:



$$U'(x) = -30x + 6\,300$$

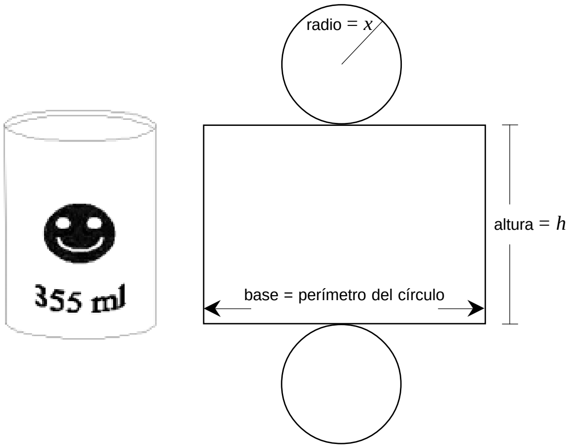
$$-30x + 6\,300 = 0$$

$$x = \frac{6\,300}{30}$$

$x = 210$ nuevo precio de venta

3. Los alumnos de administración del Centro Universitario de la Costa, están elaborando un producto comestible para lanzarlo al mercado, para ello requieren de la elaboración de un envase cilíndrico como contenedor del producto. El contenido comercial del producto es de 355 ml. Calcular las dimensiones del envase para el cual se requiera el mínimo de material para su construcción, es decir, la construcción del recipiente más económico.

En el modelado se requiere de una variable que defina el material mínimo (área) en función de las dimensiones de la lata, es decir:



Material = 2 tapas + 1 rectángulo

$$M(x) = 2\underset{\text{área círculo}}{(\pi x^2)} + \left[\underset{\text{base}}{(2\pi x)} \quad \underset{\text{altura envase}}{(h)}\right]$$

$$M(x) = 2\pi x^2 + 2\pi xh$$

En este caso se presentan dos variables independientes, el caso del radio x y el caso de la altura h. Para definirlas en relación con una sola, se tiene:

Volumen = área de la base × altura

$$355\text{cm}^3 = \pi x^2 h \;\therefore\; h = \frac{355}{\pi x^2}$$

Entonces: $M(x) = 2\pi x^2 + 2\pi xh$ donde: $h = \dfrac{355}{\pi x^2}$ por lo tanto:

$$M(x) = 2\pi x^2 + 2\cancel{\pi x}\left(\frac{355}{\cancel{\pi x}^2}\right)$$

$$M(x) = 2\pi x^2 + \frac{710}{x} \quad \text{en } x > 0$$

Se continúa con los anteriores procesos:

$$M'(x) = 4\pi x - \frac{710}{x^2}$$

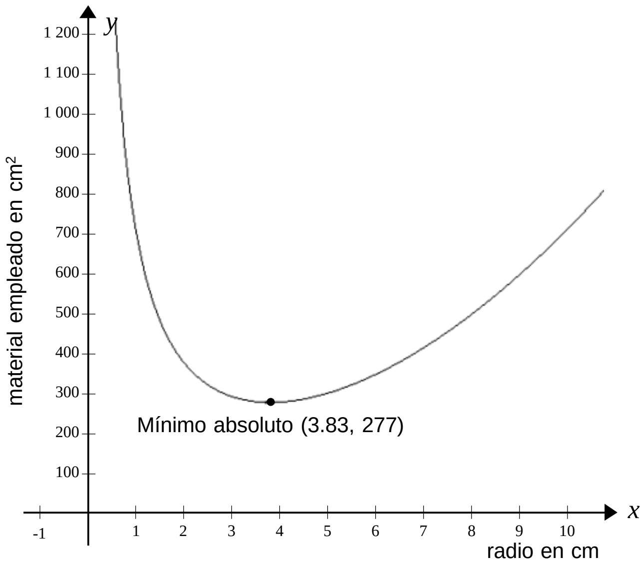
$$4\pi x - \frac{710}{x^2} = 0$$

$$4\pi x = \frac{710}{x^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{710}{4x}} = 3.83 \text{ cm}$$

El recipiente más económico deberá tener un radio de 3.83 cm y una altura de:

$$h = \frac{355}{\pi x^2} = \frac{355}{\pi(3.83)^2} = 7.7 \text{ cm}$$



EJERCICIOS 2.3 Resolver los siguientes problemas prácticos de optimización:

1. Un fabricante de cajas de aluminio desea hacer cajas sin tapas a partir de láminas de 25 cm × 25 cm por lado, cortando cuadrados iguales en las cuatro esquinas y doblando los lados hacia arriba. Determinar la

longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para obtener una caja cuyo volumen sea el mayor posible. (Recordar el ejemplo 1 del 2.2)

2. La compañía de turismo Aventuras Vallarta para un recorrido por la sierra del Tuito alquila minibuses de 40 plazas a grupos de 25 turistas como mínimo. Si el grupo es formado por los 25 turistas y cada uno paga \$500.00. Si el grupo rebasa las 25 personas, el precio del boleto disminuye en \$10.00 por cada turista que se integre al grupo. Determinar el número de turistas a bordo para el cual los ingresos de Aventuras Vallarta serán los máximos.

3. El departamento de recreación del ayuntamiento de Puerto Vallarta, planea construir un área de *picnic* cercando un área rectangular de 4 185 m^2 a lo largo de la orilla del río Cuale; no se requiere cerca de lo largo de la corriente. ¿Cuál es la menor cantidad de cerca necesaria para realizar dicho trabajo?

4. El hotel Camarena de Puerto Vallarta, planea construir una piscina de base cuadrada de 108 m^3 de capacidad. ¿Qué dimensiones debe tener la piscina, para que la cantidad de material empleada en su construcción sea el mínimo?, es decir, ¿Qué *dimensiones* exigirá el menor costo?

5. *Maximización de ganancias*.[7] Las ganancias totales de la compañía Acrosonic por la fabricación y venta de x unidades del sistema de sonido modelo F están dadas por $P(x) = -0.02x^2 + 300x - 200\,000$ dólares. ¿Cuántas unidades de este sistema se deben de producir a fin de maximizar las ganancias?

[7] *Ibidem.*

UNIDAD III

Antiderivación o integración

3.1 Introducción

El cálculo diferencial se encarga del problema de hallar la razón de cambio de una cantidad con respecto de otra. En éste capítulo, se inicia en el estudio de la otra rama del cálculo, conocida como cálculo integral. En este caso habrá que resolver el problema inverso: si se conoce la razón de cambio de una cantidad en relación con otra. La principal herramienta utilizada en el estudio del cálculo integral es la *antiderivada* de una función, y aquí se desarrollarán reglas para la antiderivación, o integración, como se llama al proceso necesario para encontrar la antiderivada.

En matemáticas toda operación tiene su inverso, es decir, la operación inversa de la suma es la resta, de la potencia los radicales, del logaritmo natural el valor exponencial, etc. Ahora bien, la operación inversa de la derivación es la antiderivación o integración.

En las unidades anteriores, se estudiaron algunos problemas de la forma: dada una función $f(x)$, determinar su derivada $f'(x)$. Ahora con la operación inversa de la derivada se tiene: dada una derivada $f'(x)$, determinar su función. Por ejemplo, dada las siguientes funciones:

$$f_1(x) = 3x^2 + 5x - 10 \qquad f_2(x) = 3x^2 + 5x + 14$$
$$f_3(x) = 3x^2 + 5x - \tfrac{3}{4} \qquad f_4(x) = 3x^2 + 5x$$

La derivada para cada función es: $f'(x) = 6x + 5$

Ahora, al antiderivar $f'(x) = 6x + 5$, ¿cuál de las cuatro funciones anteriores será la solución? Al aplicar el proceso de antiderivación (que se estudiará más adelante), se llega a una solución generalizada:

$$f'(x) = 6x + 5 + C$$

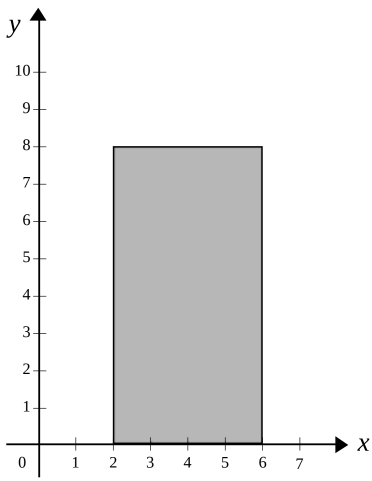
Donde C es una constante que representa tanto a -10, 14, $-\frac{3}{4}$ ó incluso a cero de las cuatro funciones mostradas anteriormente.

Se inicia con los problemas de cálculo de áreas para iniciarse en el concepto básico del cálculo integral.

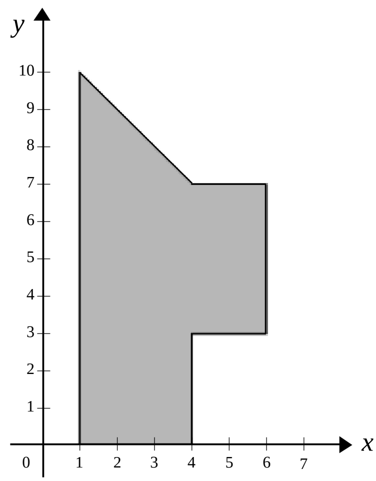
3.2 Cálculo de áreas de figuras conocidas

La idea principal del cálculo integral es el cálculo de áreas de una figura limitada por una función $f(x)$. Para iniciarse en el tema se parte con el cálculo de áreas de figuras geométricas regulares.

¿Cuál es el área de las siguientes figuras?



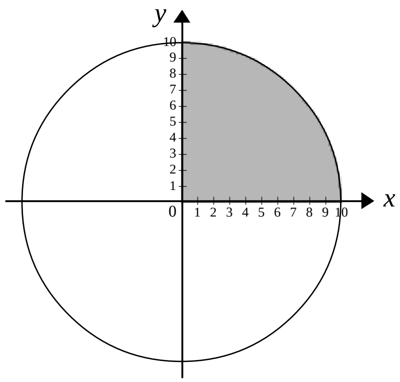
$A = (4 \times 8) = 32$

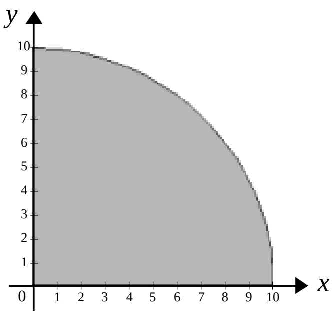


$A = (3 \times 7) + (\frac{3 \times 3}{2}) + (2 \times 4) = 33.5$

Existen áreas cuya delimitación no son líneas rectas, es decir, son curvas y el cálculo de su área no es sencillo.

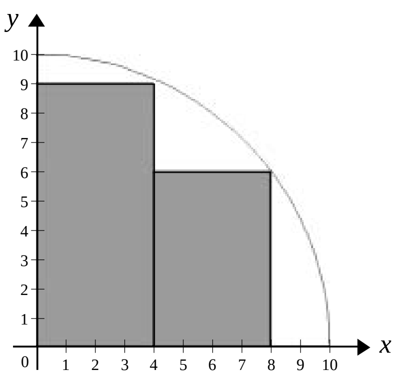
Suponer que se desea determinar el área de un círculo, el cual se divide en cuatro cuadrantes. Se calcula el área de un solo cuadrante. Ahora el problema es hallar el área de éste cuadrante.



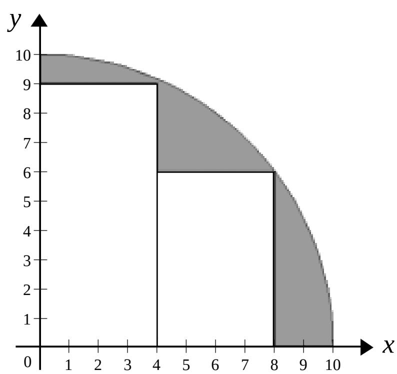


Área del círculo
$A = 4 \times$ área del cuadrante

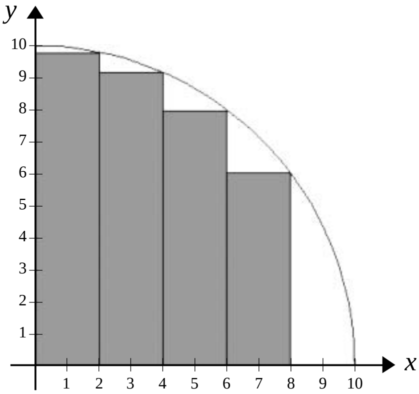
Hay que recordar qué para determinar la pendiente de una recta tangente, se obtuvo mediante la aproximación de pendientes de rectas secantes, tomando el límite de estas aproximaciones. Aquí se plantea un concepto similar para el cálculo de áreas, solo que ahora dividimos el área a calcular en pequeños rectángulos de igual base cada uno (Δx), de ésta manera se toma el límite de todas las áreas de los rectángulos.



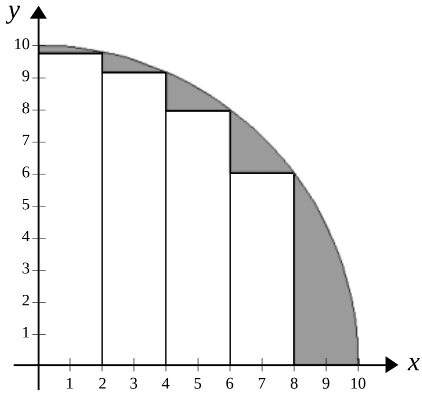
El área de estos 2 rectángulos es
$A = (4 \times 9) + (4 \times 6) = 60$



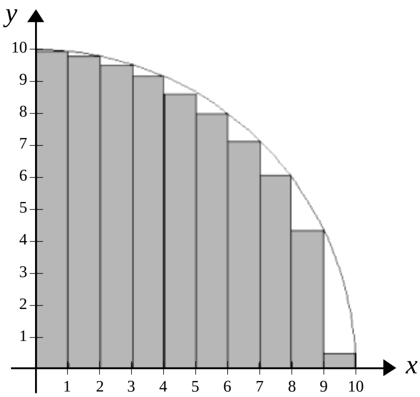
Aún así, 60 no es el área de este segmento de círculo, puesto que falta determinar el área sombreada fuera de los rectángulos.



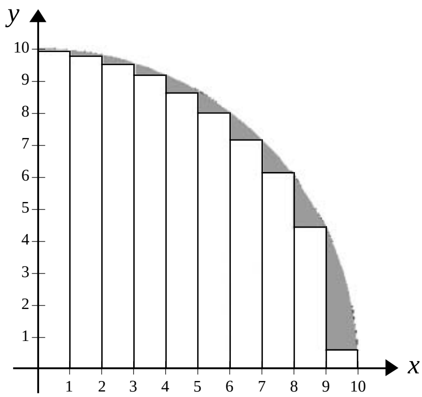
Área total de estos 4 rectángulos es
$A = 66$



Aún así, 66 no es el área del cuadrante, puesto que falta determinar el área sombreada fuera de los rectángulos.

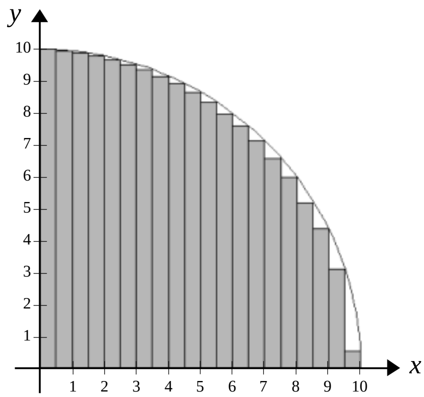


Área total de estos 10 rectángulos es
$A = 72$



Aún así, 72 no es el área del cuadrante, puesto que falta determinar el área sombreada fuera de los rectángulos.

Se puede seguir con este proceso haciendo más rectángulos de base más angosta, el área sobrante será cada vez menor. El valor de la suma de las áreas de los rectángulos se aproximará al valor real del área del cuadrante.



El área de éste segmento de círculo se puede conocer calculando el límite de las sucesiones (sumatoria) de las áreas calculadas de ésta manera:

$$\text{Áreas} = \{60, 66, 72, \ldots$$

Calculando para sucesivas particiones, aproximando a 2 cifras, se determina que el límite de ésta sucesión es de 78 (que no es mas que el área del cuadrante).

Éste resultado se pudo haber obtenido usando la fórmula para determinar el área de un círculo (πr^2)

$$\text{Área del círculo} = \pi\,(10)^2 = 314.15$$

$$\text{Área del cuadrante (cuarto del círculo)} = \frac{314.15}{4} = 78.5$$

Ahora bien, conociendo el concepto del cálculo de áreas bajo una curva, se puede resolver de una manera más sencilla, bajo el concepto de integración.

Primero se aprenderá con algunas técnicas a integrar funciones y posteriormente a calcular áreas en integración definida.

3.3 Integral indefinida

Una función g se llama *antiderivada* de una función f, en el intervalo (a, b), si $g'(x) = f(x)$ para todo valor de x en el intervalo.

Ahora bien, si g esta definida por $g(x) = 5x^3 - 3x^2 + 5$, donde:

$$g'(x) = 15x^2 - 6x$$

Entonces, si f es la función definida por $f(x) = 15x^2 - 6x$, se dice que, f es la derivada de g.

Por lo tanto, g es una antiderivada de f.

Si ahora se tiene una función h definida por $h(x) = 5x^3 - 3x^2 - 12$ entonces h es también una antiderivada de f, ya que $h'(x) = 15x^2 - 6x$

Así pues, cualquier función dada por $5x^3 - 3x^2 + C$, donde C es cualquier constante, será una antiderivada de f.

Su interpretación matemática está en función de las sumatorias de todos los rectángulos en el intervalo $[a, b]$ y es representada por $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ (suma de Riemann). Por lo tanto, a este tipo de límite de sumatorias se le denota con el símbolo $\int$ que es la operación de antiderivada y se escribe

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C;\ \text{donde: } F'(x) = f(x)$$

3.3.1 Fórmulas de integración

Al igual que en las derivadas donde se emplean técnicas de derivación para simplificar sus cálculos, en antiderivación también se presentan técnicas básicas de integración:

1. $\int dx = x + C$; donde C es una constante de integración.

2. $\int k\, f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$; donde k es una constante arbitraria.

3. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$

4. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

5. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

6. $\int e^x\,dx = e^x + C$

EJEMPLO 3.1 Calcular las siguientes integrales:

1. $\int x^2\,dx =$ (teorema 4) $\dfrac{x^{2+1}}{2+1} = \dfrac{x^3}{3} = {}^1\!/_3\, x^3 + C$

2. $\int x^3\,dx = \dfrac{x^{3+1}}{3+1} = \dfrac{x^4}{4} + C = \dfrac{1}{4}x^4 + C$

3. $\int \dfrac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \dfrac{x^{-2+1}}{-2+1} = \dfrac{x^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{x} + C$

4. $\int \dfrac{1}{x}\,dx =$ (fórmula 5) $= \ln|x| + C$

5. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \dfrac{1}{x^{1/2}}\,dx = \int x^{-1/2}\,dx = \dfrac{x^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}}}{-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} + C$

6. $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{1/3}\,dx = \dfrac{x^{1/3} + \frac{3}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}} + C = \dfrac{x^{4/3}}{{}^4\!/_3} + C = \dfrac{3}{4}x^{4/3} + C = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

7. $\int \sqrt{x^3}\,dx = \int x^{3/2}\,dx = \dfrac{x^{3/2} + \frac{2}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{2}{2}}$

8. $\int \left(3x^3 - x^2 + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx =$ (fórmula 3) $\int 3x^3\,dx - \int x^2\,dx = \int 4x^{-\frac{2}{3}}\,dx\ldots$

EJERCICIOS 3.1 Calcular las siguientes integrales:

1. $\int \sqrt{x^3}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 dx$

2. $\int 2x^2\ \sqrt[3]{27x^2}\,dx$

3. $\int \dfrac{4x^2 + 8x - 3}{\sqrt[3]{8x^2}}\,dx$

4. $\int \left(\sqrt{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\right) dx$

3.3.2 Problemas con valores iniciales

Como se ha visto anteriormente, la antiderivada $F(x) + C$ representa una familia de soluciones de n funciones $f(x)$. Si se tiene una antiderivada $F(x) = 3x^2 + 2x + C$, donde C es cualquier constante.

Se dice pues que es solución de la familia paramétrica de las funciones $f_1(x) = x^3 + x^2 - 5$; $f_2(x) = x^3 + x^2 + 45$; $f_3(x) = x^3 + x^2 + 100$ y $f_4(x) = x^3 + x^2 - \frac{2}{3}$

Pero si se desea llegar a una función $f(x)$ en particular de las cuatro anteriores es necesario saber el valor de la constante de integración C. Sin embargo, las situaciones del mundo real, es necesario definir una sola función (un único resultado) y no toda una familia de resultados.

Por ejemplo, si se desea saber la duración de una maquinaria industrial se inicia desde el año cero, en el momento que inicia su actividad, también si se necesita saber el incremento de una población de determinado lugar es necesario saber su población actual (valor inicial) a partir del momento de estudio.

EJEMPLO 3.2 Determinar la función f si se sabe que $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x$ con un valor inicial de $f(2) = 3$.

Se sabe que $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

Al integrar la función f', se tiene $\int (4x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + C$

Aplicando la condición inicial $f(2) = 3$ a la función $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + C$, se obtiene:

si $x = 2$, entonces: $f(x) = 3$ entonces:

$3 = (2)^4 - 2(2)^3 + 4(2)^2 + C$

$3 = 16 + C$

$C = -13$

Por lo tanto, la función requerida f está dada por $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 13$

EJEMPLO 3.3 *Circulación de una revista.*[8] La circulación actual de Investor's Digest es de 3 000 ejemplares por semana. Se espera que la circulación aumente a razón de $4t + 5t^{2/3}$ ejemplares por semana, t semanas a partir de hoy, durante los próximos 3 años. Con base en esta proyección, ¿cuál será la circulación de la revista dentro de 125 semanas?

Sea $S(t)$ la circulación de la revista dentro de t semanas. Entonces $S'(t)$ es la razón de cambio de la circulación por semana y está dada por $S'(t) = 4t + 5t^{2/3}$

[8] *Ibidem*.

Además, la circulación actual de 3 000 copias por semana se traduce en la condición inicial $S(0) = 3\ 000$. Al integrar la ecuación diferencial con respecto de t se tiene:

$$\int S'(t)\,dt = \int (4 + 5t^{2/3})\,dt$$

$$= 4t + \frac{5t^{2/3+3/3}}{2/3 + 3/3} + C$$

$$= 4t + 3t^{5/3} + C$$

Para determinar el valor de C, se usa la condición $S(0) = 3\ 000$ para escribir

$$S(0) = 4(0) + 3(0)^{5/3} + C = 3\ 000$$

$$C = 3\ 000$$

Por lo tanto, la circulación de la revista dentro de t semanas será de

$$S(t) = 4t + 3t^{5/3} + 3\ 000$$

En particular, la circulación de la revista dentro de 125 semanas será

$$S(125) = 4(125) + 3(125)^{5/3} + 3\ 000 = 12\ 875 \text{ copias por semana.}$$

3.4 Integración por sustitución

Esta sección presenta la versión integral de la regla de la cadena. Para recordar, se muestra una aplicación común de la regla de la cadena para la derivación.

Si se tiene la función $y = (3x^2 + 2x + 8)^6$ donde su derivada es:

$$y' = 6(3x^2 + 2x + 8)^5\,(6x + 2)$$

Se observa que el segundo factor $(6x + 2)$ es la derivada del primer factor $(3x^2 + 2x + 8)$, la cual toma la forma de:

$$\underbrace{6(3x^2 + 2x + 8)^5}_{f(u)}\ \underbrace{(6x + 2)}_{\frac{du}{dx}}$$

donde: $f(u) = 6u^5$ y $u = 3x^2 + 2x + 8$, entonces, $\frac{du}{dx} = 6x + 2 \therefore du = (6x + 2)\,dx$.

La mayoría de los productos como se representaron anteriormente, se pueden antiderivar. Si F es una antiderivada de f, entonces:

$$\int f(u)\,\frac{du}{\cancel{dx}}\,\cancel{dx} = \int f(u)\,du = F(u) + C$$

EJEMPLOS 3.4 Hallar las siguientes integrales por sustitución:

1. $\int 6(3x^2 + 2x + 8)^5 (6x + 2)\, dx$ Primeramente se determina u y su derivada du:

$$u = (3x^2 + 2x + 8) \text{ y } du = (6x + 2)\, dx$$

si se completa el diferencial du, como en éste caso, se aplica la fórmula de integración $\int f(u)\, du = F(u) + C$:

$$\underbrace{6\int (3x^2 + 2x + 8)^5}_{\int f(u)} \underbrace{(6x + 2)\, dx}_{du}$$

$$6\int u^5\, du$$

integrando $= 6\,\dfrac{u^{5+1}}{5+1} + C = u^6 + C$ sustituyendo u, resulta: $= (3x^2 + 2x + 8)^9 + C$

2. $\int x^2 \sqrt[3]{(3x^3 + 4)^2}\, dx = \int (3x^3 + 4)^{2/3} x^2\, dx$

$u = 3x^3 + 4 \quad du = \mathbf{9}x^2dx$ para completar el diferencial du es necesario un **9**, por lo tanto $\frac{9}{9} = 1$:

$$= \int (3x^3 + 4)^{2/3}\, \frac{\mathbf{9}}{9}\, x^2dx = \frac{1}{9}\int (3x^3 + 4)^{2/3}\, \mathbf{9}\, x^2dx$$

Una vez completo el diferencial $du = \mathbf{9}x^2dx$ se aplica la sustitución y se integrar:

$$= \frac{1}{9}\int u^{2/3}\, du = \frac{1}{9}\cdot\frac{u^{\frac{2}{3}+\frac{3}{3}}}{\frac{2}{3}+\frac{3}{3}} + \mathrm{C}$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{u^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}} + \mathrm{C}$$

$$= \frac{1}{45}\sqrt[3]{u^5} + C$$

$$= \frac{1}{45}\sqrt[3]{(3x^3 + 4)^5} + C$$

EJERCICIOS 3.2 Calcular las siguientes integrales por sustitución:

1. $\int \sqrt{5x + 2}\, dx$

2. $\int 2x\sqrt{x^2 - 4}\, dx$

3. $\int x^3\sqrt{2x^4 - 4}\, dx$

4. $\int \dfrac{4x}{x^2 + 2}\, dx$

5. $\int \frac{x^2}{(2x^3+8)^3}\,dx$

6. $\int \frac{4x+8}{\sqrt{(3x^2+12x+4)^3}}\,dx$

7. $\int \frac{x}{x+2}\,dx$

8. $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

9. $\int \frac{2x^3}{x^4-4}\,dx$

10. $\int (x^2-1)\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}x^3-4x+8\right)^2}\,dx$

3.5 La integral definida

Una vez conociendo algunas de las técnicas de integración y bajo el teorema fundamental del cálculo se pueden determinar el área bajo una función, en algún intervalo cerrado $[a, b]$.

Supóngase que $f(x)$ es continua y se encuentra definida en el intervalo $[a, b]$, entonces $f(x)$ es integrable en dicho intervalo. Entonces si $f(x)$ es continua y no negativa en $[a, b]$, su resultado numérico se llama *integral definida* de la función $f(x)$.

La integral definida es el cambio neto producido en la antiderivada entre las ordenadas $x = a$ y $x = b$, se representa matemáticamente por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

La nomenclatura $\int_a^b f(x)\,dx$ se lee "la integral definida de la función desde a hasta b". Donde a y b son los extremos del intervalo que son los límites de integración.

EJEMPLO 3.5 Hallar las siguientes integrales definidas:

1. $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x}\,(x+4)\,dx$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}\right)dx \quad \text{integrando: } = \left.\frac{x^{\frac{4}{3}+\frac{3}{3}}}{\frac{4}{3}+\frac{3}{3}} + 4\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}}\right]_{-1}^{1} = \left.\frac{3}{7}x^{7/3} + 3x^{4/3}\right]_{-1}^{1}$$

aplicando los límites: $= \underbrace{\left[\frac{3}{7}(1)^{7/3} + 3(1)^{4/3}\right]}_{\text{límite superior } (b)} - \underbrace{\left[\frac{3}{7}(-1)^{7/3} + 3(-1)^{4/3}\right]}_{\text{límite inferior } (a)}$

$$= \left(\frac{3}{7} + 3\right) - \left(-\frac{3}{7} + 3\right) = \frac{6}{7}$$

2. Evaluar $\int_0^1 \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

$$= \int_0^1 (x^2 - 1)x^{-\frac{2}{3}}\, dx = \int_0^1 (x^{\frac{4}{3}} - x^{-\frac{2}{3}})\, dx$$

$$= \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}\Big]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{3}{7}(1)^{\frac{7}{3}} - 3(1)^{\frac{1}{3}}\right] - \left[\frac{3}{7}(-1)^{\frac{7}{3}} - 3(-1)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= -\frac{36}{7}$$

EJERCICIOS 3.3 Calcular las siguientes integrales definidas:

1. $\int_0^2 (12x - 4)\sqrt{(3x^2 - 2x)^3}\, dx$

2. $\int_1^3 2x^2\sqrt{x^3 + 1}\, dx$

3. En cierta fábrica, el costo marginal es de $4(q - 2)^2$ euros por unidad, cuando el nivel de producción es q unidades. ¿En cuánto aumentará el costo total de fabricación si el nivel de producción aumenta de 4 a 12 unidades?

4. *Crecimiento de la población*.[9] Se proyecta que la población de cierta ciudad crezca a razón de

$$hab(t) = 400\left(1 + \frac{2t}{24 + t^2}\right) \text{ en } 0 \le t \le 5$$

[9] *Ibidem*.

personas por año dentro de t años. La población actual es de 60 000. ¿Cuál será la población dentro de cinco años?

3.6 Valor promedio de una función

Cuando se desea obtener el valor promedio de un conjunto de n números, se suman los elementos del conjunto y se divide entre el número total de elementos, es decir:

$$\frac{1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n}{n} = \text{valor promedio}$$

Así pues, el valor promedio de una función continua $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ brinda una aplicación más de la integral definida.

Supóngase que $f(x)$ es continua y se encuentra definida en el intervalo $[a, b]$, entonces $f(x)$ es integrable en dicho intervalo. Ahora, si se divide el intervalo $[a, b]$ a lo largo del eje x en n incrementos Δx de igual longitud, es decir:

$$\frac{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + b_n}{n} = \frac{(b-a)}{n} = \Delta x$$

Ahora para una función $f(x)$ su valor promedio esta dada por la razón:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)}{n}$$

que es una aproximación del promedio de todos los valores de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$. Esta expresión se puede escribir como

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)}{n}$$

$$= \frac{f(x_1)}{n} + \frac{f(x_2)}{n} + \cdots + \frac{f(x_{n-1})}{n} + \frac{f(x_n)}{n}$$

multiplicando cada término por $\frac{(b-a)}{(b-a)}$

$$\frac{(b-a)}{(b-a)}\left[\frac{f(x_1)}{n}+\frac{f(x_2)}{n}+\ldots+\frac{f(x_{n-1})}{n}+\frac{f(x_n)}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{f(x_1)(b-a)}{n}+\frac{f(x_2)(b-a)}{n}+\ldots+\frac{f(x_{n-1})(b-a)}{n}+\frac{f(x_n)(b-a)}{n}\right]$$

donde $\frac{(b-a)}{n}=\Delta x$, por lo tanto:

$$=\frac{1}{b-a}\left[f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ldots+f(x_n)\Delta x\right]$$

La anterior relación entre corchetes proporciona la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$.

$$\left[f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ldots+f(x_n)\Delta x\right]=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Si n incrementa a un gran número de intervalos la relación anterior tiende al valor promedio de la función $f(x)$ con mayor precisión. Así pues, la suma de Riemann queda:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(b-a)}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Ahora se puede definir el valor promedio de una función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$:

$$\text{Valor promedio de } f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

EJEMPLOS 3.6 Resolver los siguientes ejercicios de valor promedio:

1. Calcular el valor promedio de la función $y = x\sqrt{16-x^2}$ en el intervalo $[1, 3]$

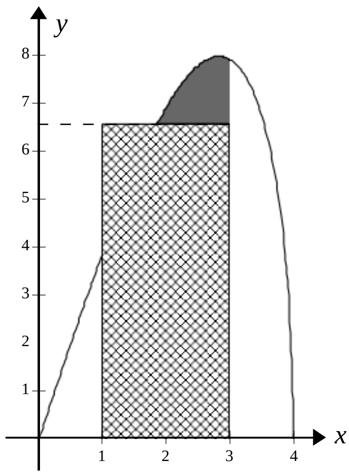
$$f(x)_{\text{promedio}}=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{3-1}\int_1^3 x\sqrt{16-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^3 x\sqrt{16 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3} \sqrt{(16 - x^2)^3}\Big|_1^3 \right]$$

$$f(x)_{\text{promedio}} = 6.6$$

La interpretación geométrica del teorema del valor promedio es la relación del área bajo la curva en el intervalo $[a, b]$ y el área del rectángulo que se forma a partir de su base de longitud $[a, b]$ con su altura correspondiente al valor promedio de la función, por ejemplo:

área bajo la curva:	área del rectangulo:
$A(x) = \int_1^3 x\sqrt{16 - x^2}\, dx$	base: $[a, b] = [3 - 1] = 2$
$A(x) = -\frac{1}{3} \sqrt{(16 - x^2)^3}\Big\|_1^3$	altura: $f(x)_{\text{promedio}} = 6.6$
$A(x) = 13.2\ u^2$	$A = b \cdot a = 2 \times 6.6 = 13.2\ u^2$



2. *Financiamiento de un automóvil.*[10] Las tasas de interés que cobró Madison Finance por sus préstamos para la compra de autos usados durante un periodo de 6 meses en 2000, se aproxima mediante la función:

[10] *Ibidem*.

$$r(t) = -\frac{1}{12}t^3 + \frac{7}{8}t^2 - 3t + 12 \quad \text{en } 0 \leq t \leq 6$$

donde t se mide en meses y $r(t)$ es la tasa porcentual anual. ¿Cuál es la tasa promedio sobre los préstamos extendidos por Madison durante el promedio de 6 meses?

La tasa promedio durante el periodo de seis meses en cuestión está dada por:

$$\begin{aligned}
\text{tasa promedio} &= \frac{1}{6-0}\int_0^6 \left(-\frac{1}{12}t^3 + \frac{7}{8}t^2 - 3t + 12\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{48}t^4 + \frac{7}{24}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 12t\right)\Big|_0^6 \\
&= 0.09 \approx 9\% \quad \text{anual}
\end{aligned}$$

EJERCICIO 3.4 Resolver el siguiente ejercicio de valor promedio:

1. *Ventas anuales promedio.*[11] Las ventas de la compañía de instrumentos Universal durante los primeros t años de operación se aproxima mediante la función

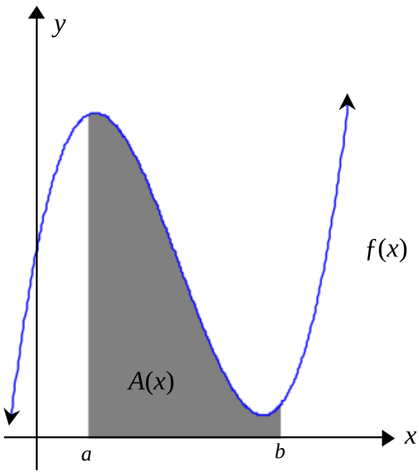
$$S(t) = t\sqrt{0.2t^2 + 4}$$

donde $S(t)$ se mide en millones de dólares. ¿Cuáles fueron las ventas anuales promedio de Universal durante sus primeros cinco años de operación?

3.7 Área bajo una curva

Como se comentó con anterioridad, si $f(x)$ es continua y no negativa en $[a, b]$, su resultado numérico será el área de la región sombreada $A(x)$ bajo la curva que se forma por las ordenadas $x = a$ y $x = b$, el eje x, y la función $y = f(x)$. Existe una relación entre esta área y la integral definida, como se observa en la figura siguiente:

[11] *Ibidem.*



$$A(x) = \int_a^b f(x)\, dx$$

EJEMPLOS 3.7 Hallar las siguientes áreas, bajo la curva.

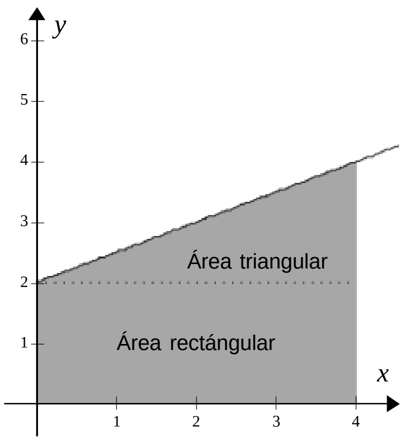
1. Para demostrar su aplicación, se desea encontrar el área de una figura geométrica regular que se forma bajo la gráfica $y = \frac{1}{2}x + 2$, el eje y, el eje x y la ordenada $x = 4$.

La región en cuestión es un área compuesta por un triangulo y un rectángulo como se muestra:

Área total = Área triangular + Área rectángular

Área total $= \dfrac{b \cdot h}{2} + b \cdot h = \left(\dfrac{4 \times 2}{2}\right) + (4 \times 2)$

Área total = 12 unidades cuadradas



Pero aplicando el cálculo y la definición de integral definida se tiene:

$$\int_0^4 \left(\tfrac{1}{2}x + 2\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + 2x \Big|_0^4$$

$$= \left[\frac{1}{4}(4)^2 + 2(4)\right] - \left[\frac{1}{4}(0)^2 + 2(0)\right] = 12u^2$$

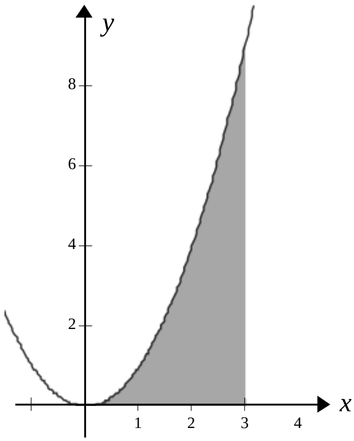
2. Encontrar el área que se forma a partir de la curva $y = x^2$, el eje x y la ordenada 3.

Primero se delimita la región (área sombreada) y luego se calcula el área

$$\int_0^3 x^2\,dx$$

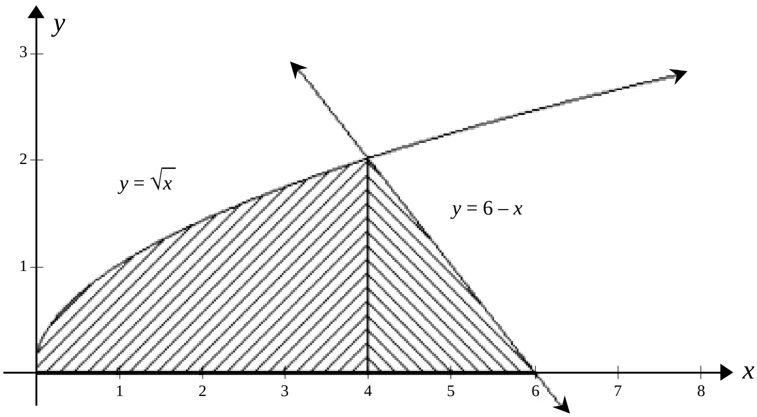
$$= \frac{1}{3}x^3\Big]_0^3$$

$$= \left[\frac{1}{3}(3)^3\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3\right] = \frac{27}{3}u^2$$



3. Hallar el área de la región limitada por las gráficas $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = 6 - x$, y el eje x.

El área $A(x) = A_1 + A_2$ que se forma bajo dos curvas como se ilustra en la siguiente gráfica:



Primeramente se calcula el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$, el cual se conoce el valor del primer límite $x = 0$, el segundo de los límites se determina igualando ambas ecuaciones (punto de intersección:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ \sqrt{y} &= 6 - x \\ x &= (6 - x)^2 \\ x &= 36 - 12x + x^2 \\ x^2 - 13x + 36 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto las integrales quedan:

$$A_1 = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx \qquad A_1 = \frac{16}{3}$$

$$A_2 = \int_4^6 (6 - x)\, dx \qquad A_2 = 2$$

$$A_{\text{total}} = A_1 + A_2 = \frac{16}{3} + 2$$

$$A_{\text{total}} = \frac{22}{3} \approx 7.33\, u^2$$

EJERCICIOS 3.5 Calcular las áreas bajo las siguientes curvas:

1. Hallar el área que se encuentra bajo las curvas $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y = x^2$, el eje x y la ordenada $x = 3$.

2. Determinar el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + 4x$ y el eje x.

3. Encontrar el área de la región limitada por la curva $y = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$, el eje x y la ordenada $x = 2$.

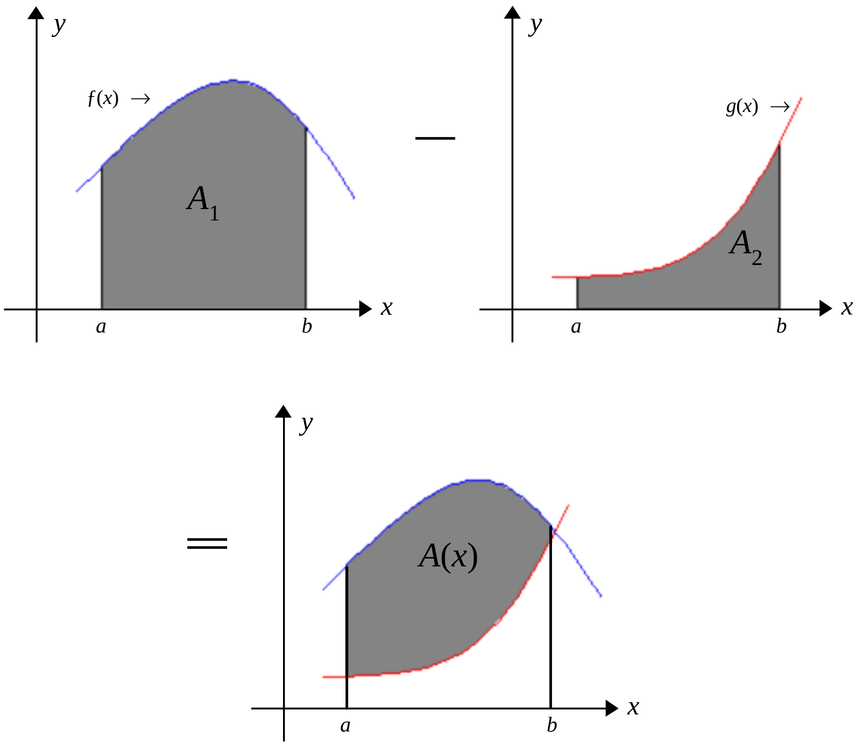
4. Hallar el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + 4x - 3$ y el eje x.

3.8 Área entre dos curvas

En el tema anterior se determino el área bajo una curva. Ahora se estudiará el cálculo de áreas delimitadas entre dos curvas. Alguna de las aplicaciones de la integral definida para el cálculo de áreas se aplican a problemas prácticos de ingeniería (volúmenes de sólidos, trabajo realizado por una fuerza) y en economía (superávit del consumidor, exceso de utilidad neta). Para ello es necesario calcular el área entre dos curvas.

Si se tienen dos funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ no negativas en el intervalo $[a, b]$, y donde $f(x) > g(x)$, su resultado numérico será el área de la región sombreada $A(x)$ que se forma entre las dos gráficas, así como las ordenadas $x = a$ y $x = b$.

El área $A(x)$ se obtiene a partir de la diferencia entre el área (A_1) bajo la curva $f(x)$ y el área (A_2) bajo la curva $g(x)$ como se ilustra en la siguiente figura:



El área entre 2 curvas es la relación

$$A(x) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

EJEMPLO 3.8 Hallar el área entre las curvas siguientes:

1. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = \frac{1}{2}x$.

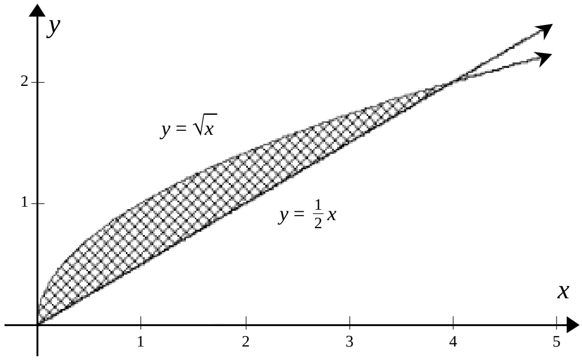
Primero se trazan las gráficas para delimitar la región $A(x)$ y definir la gráfica superior y la gráfica inferior:

$$\text{Área} = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx - \int_0^4 \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x^2\Big]_0^4$$

$$= \frac{4}{3}u^2$$

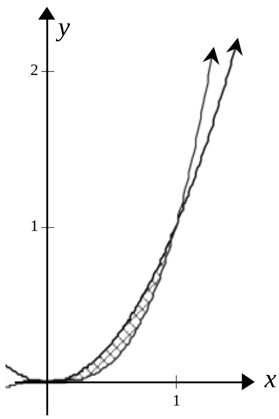


2. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = x^2$.

$$\text{Área} = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4\right)\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{12}u^2$$



3. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$ y $y = x^2 - 1$.

Las dos curvas forman un área compuesta por dos regiones, en la cual una de las gráficas se encuentra en la parte superior en la primera región A_1 y en la parte inferior en la segunda región A_2.

$A_1 = \int_{-1}^{1} (2x^3 - 3x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 1)\, dx$

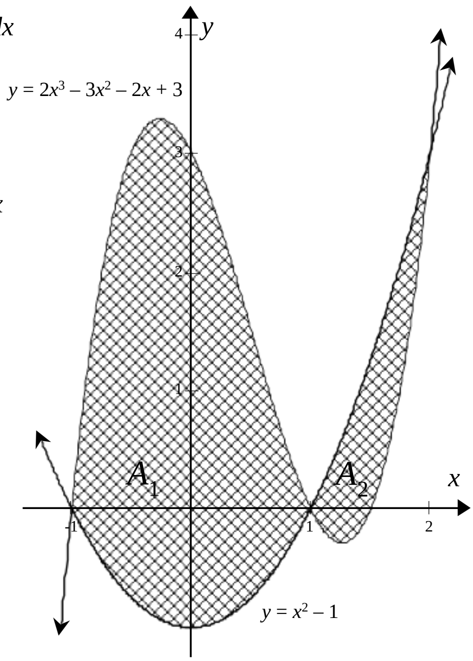
$A_1 = \dfrac{16}{3}$

$A_2 = \int_{1}^{2} (x^2 - 1) - (2x^3 - 3x^2 - 2x + 3)\, dx$

$A_2 = \dfrac{5}{6}$

Área total $= A_1 + A_2 = \dfrac{16}{3} + \dfrac{5}{6}$

Área total $= \dfrac{37}{6} u^2$



EJERCICIOS 3.6 Calcular las áreas de la región limitada por las curvas dadas:

1. $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$

2. $y + x^2 = 6$ y $y + 2x - 3 = 0$

3. $y = x + 6$; $y = x^3$ y $y = -\frac{1}{2}x$

4. $y^2 = x + 1$ y $y = x - 1$

5. $y = \sqrt{x}$ y $y = x^3$

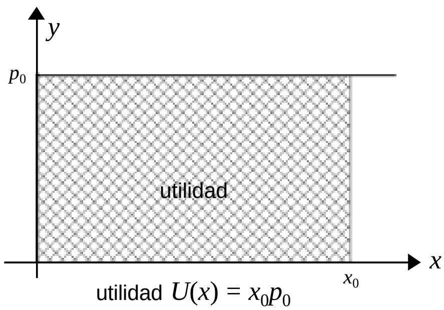
6. $2y^2 = x + 4$ y $x = y^2$

UNIDAD IV

Optimización

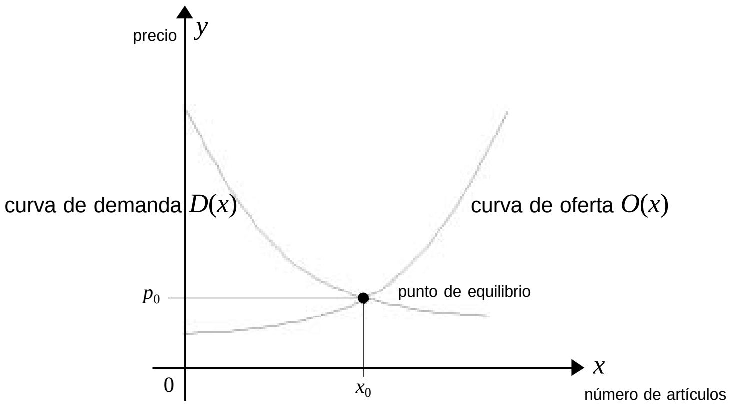
4.1 Introducción

Cuando se tiene un producto el cual no varía su precio p_0 unitario en determinado número de artículos x_0, la utilidad por el fabricante será el área que se forma a través del número de productos vendidos x_0 multiplicado por el precio del producto p_0, es decir:



Ahora bien, sea x el número de determinado artículo, que varía en forma continua, y sea p el precio unitario del artículo. Una función $D(x)$ determina la demanda que da la relación entre el precio de venta contra el número de unidades que se adquieren a dicho precio.

Uno de los instrumentos para definir los precios de los bienes y servicios en el mercado son la ley de la oferta y la demanda. Según esta ley determina los precios de los productos en la intersección de las gráficas de la oferta y la demanda.

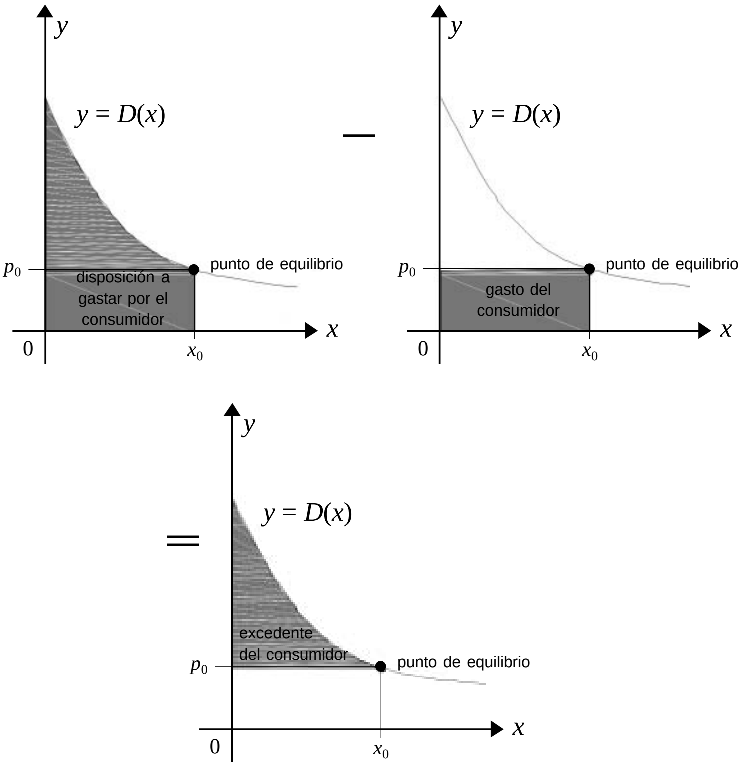


En teoría, cuando la oferta supera la demanda, los productores deben reducir los precios para estimular las ventas; de forma análoga, cuando la demanda es superior a la oferta, los compradores presionan al alza el precio de los bienes.

Es decir, en la curva de demanda $D(x)$, cuando existe mayor consumo de artículos por el consumidor el precio tiende a disminuir (si $x > x_0$, entonces $p < p_0$), que en consecuencia habrá mas cantidad de artículos disponibles en el mercado. En la curva de la oferta $O(x)$ cuanto mayor son los artículos vendidos las empresas tienden a incrementar el precio de venta (si $x > x_0$, entonces $p < p_0$). Y es ahí donde se fija el punto de equilibrio.

4.2 Excedente del consumidor

Suponiendo que ahora se determina la demanda x_0 de un artículo en el mercado a un precio unitario p_0. Como se mencionó anteriormente, la utilidad que se obtiene con la venta de este número de artículos a este precio será $U(x) = x_0 p_0$. Los consumidores que están dispuestos a pagar más que el precio fijado p_0 ganaron porque se estableció el precio en p_0, en lugar del precio máximo del que hubieran estado dispuestos a pagar. La ganancia total que queda en los bolsillos de los consumidores también llamada excedente del consumidor (ahorro del público consumidor) que se representa mediante el área bajo la curva de demanda, arriba de la recta horizontal del precio establecido p_0.

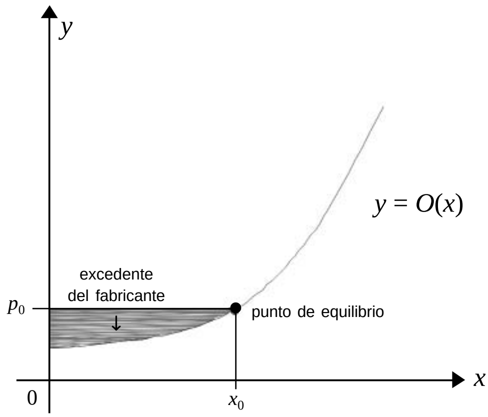


Por lo tanto el excedente del consumidor será la diferencia del área bajo la curva $y = D(x)$ y la recta de precios $y = p_0$, es decir:

$$\text{excedente del consumidor } = \int_0^{x_0} \left[D(x) - p_0 \right] dx$$

4.3 Excedente del vendedor

Inversamente a la relación de los excedentes del consumidor se tiene el excedente del productor, que es cuando el fabricante hubiera deseado vender su artículo menor a p_0, y esta representada como el área bajo la recta de precios $y = p_0$ y sobre la curva de oferta $O(x)$, es decir:



$$\text{excedente del vendedor} = \int_0^{x_0} \left[p_0 - O(x) \right] dx$$

EJEMPLO 4.1 Resolver el siguiente ejercicio

Una línea aérea comercial, planea abrir una ruta nocturna de Puerto Vallarta-Guadalajara. Sus resultados mercadotécnicos, arrojaron los siguientes datos: a un precio de \$300 USD vendería 40 boletos y a un precio de \$100 USD se venderían 100 boletos. La compañía tendría un gasto de operación de \$40 USD por plaza. Determinar el punto de equilibrio suponiendo que la ecuación de la oferta se comporta inversamente proporcional a la de demanda, para poder definir:

a) El excedente del consumidor.

b) El excedente de la compañía aérea.

Para definir la ecuación de la demanda, se tienen dos puntos de referencia $p_1 = 300$, $b_1 = 40$ y $p_2 = 100$, $b_2 = 100$

$$m = \frac{100 - 300}{100 - 40} = -3.33 \quad \text{donde: } y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1)$$

entonces: $y - 300 = -33.33(x - 40)$

$y = -33.33x + 1633.2$ ecuación de demanda

Si la ecuación de la oferta se comporta inversamente proporcional al de la demanda entonces la pendiente será de la misma magnitud pero en sentido contrario, es decir:

$m = 33.33$, costo de operación de la compañía = 50

$y = -33.33x + 50$ ecuación de oferta

Para definir el punto de equilibrio entre la oferta y la demanda se igualan las funciones de oferta y demanda:

$$33.33x + 50 = -33.33x + 1633.2$$

$$66.66x = 1583.2$$

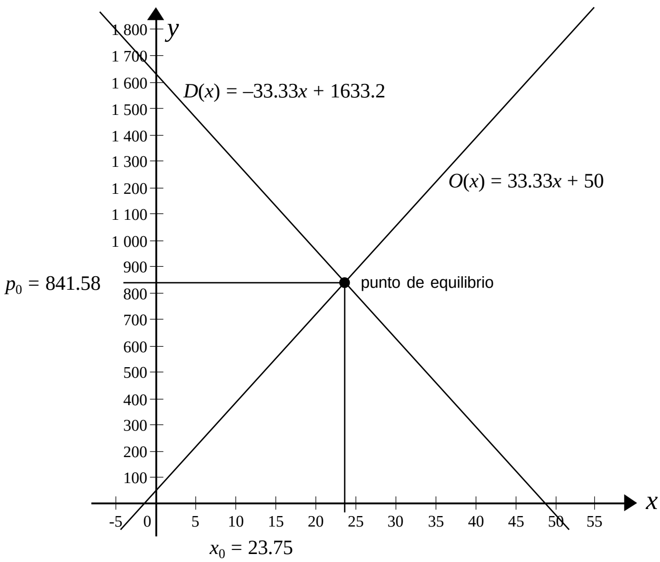
$$x = 23.75$$

sustituyendo en cualquier función

$$y = 33.33(23.75) + 50$$

$$y = 841.58$$

punto de equilibrio: $(23.75,\ 841.58)$



a) Para resolver el excedente de los consumidores se tiene la siguiente integral definida:

excedente del consumidor

$$= \int_0^{x_0} \left[D(x) - p_0 \right] dx$$

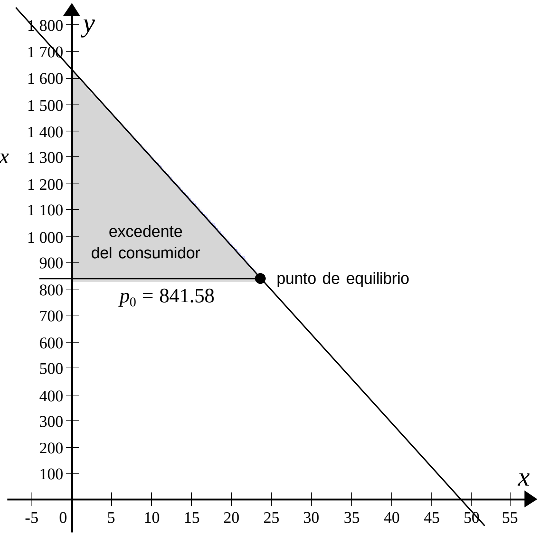
$$= \int_0^{23.75} \left[(-33.33x + 1633.2) - (841.58) \right] dx$$

$$= \int_0^{23.75} (-33.33x + 791.62)\ dx$$

$$= -16.66x^2 + 791.62x \Big]_0^{23.75}$$

excedente del consumidor

= $ 9 400 USD



b) Como la función de demanda es inversamente proporcional a la de oferta se tiene que el excedente de la compañía, deberá ser la misma que el excedente del consumidor:

excedente de la compañía

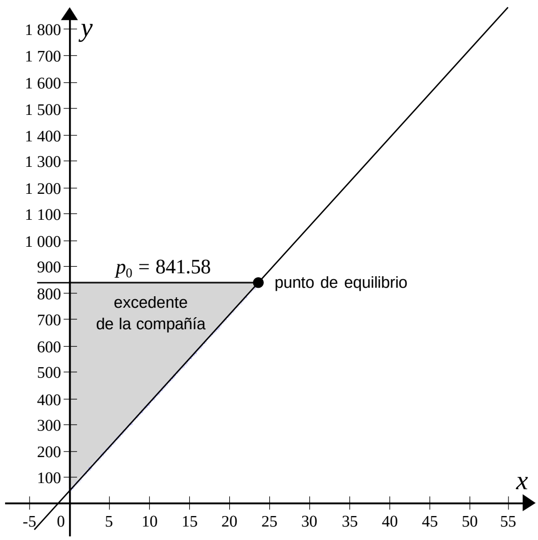
$$= \int_0^{x_0} \left[p_0 - O(x) \right] dx$$

$$= \int_0^{23.75} \left[(841.58) - (33.33x + 50) \right] dx$$

$$= \int_0^{23.75} (-33.33x + 791.58)\ dx$$

excedente de la compañía

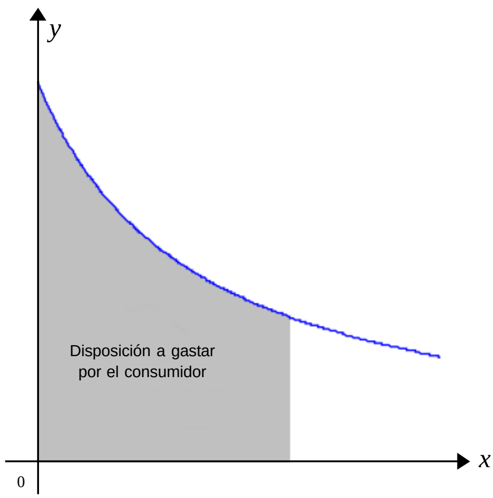
= $ 9 400 USD



4.4 Disposición a gastar por el consumidor

Como se estudio anteriormente, la disponibilidad a gastar por parte del consumidor es aquella cuando se encuentra dispuesto a gastar en comprar una unidad extra de un determinado artículo que ya ha comprado anteriormente.

Es lo que representa la curva de demanda, a mayor número de artículos vendidos el precio disminuye de manera sustantiva. Es decir, el precio que los consumidores están dispuestos a pagar para obtener una unidad adicional usualmente decrece a medida que crece la cantidad de unidades ya compradas.



La disponibilidad a gastar por el consumidor es la integral definida bajo la curva de demanda $y = D(x)$, desde 0 hasta x_0, es decir:

$$\text{disposición a gastar por el consumidor} = \int_0^{x_0} D(x)\, dx$$

EJEMPLO 4.5 Una compañía de turismo, planea vender paquetes en lancha todo incluido a las playas de Majahuitas a grupos de 6 turistas por paquete. Sus resultados mercadotécnicos, arrojaron los siguientes datos: En un solo turista el precio por paquete sería de \$ 133 USD, para 3 turistas el precio para cada uno sería de \$ 75 USD y para 6 turistas el precio por paquete sería de \$ 18 USD. Determinar el punto de equilibrio suponiendo que la ecuación de la oferta se comporta inversamente proporcional a la de demanda, para poder definir:

a) Hallar la cantidad total de dinero que los turistas (consumidores) están dispuestos a gastar para obtener 5 pases.

b) Trazar la curva de demanda e interpretar el área que representa la respuesta del inciso a.

a) Como la función de demanda, expresada en dólares por pase, la cantidad total que los consumidores están dispuestos a gastar para obtener 5 pases para el tour es la integral definida:

$$\text{disposición a gastar por el consumidor} = \int_0^{x_0} D(x)\,dx$$

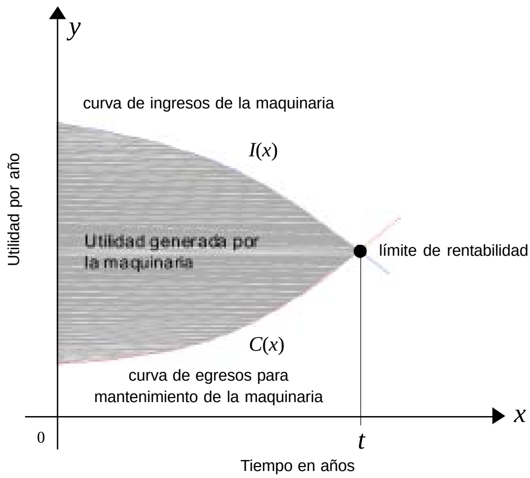
$$= \int_0^5 (2x^2 - 37x + 168)\,dx \qquad = \frac{2}{3}x^3 - \frac{37}{2}x^2 + 168x \Big|_0^5$$

$$\text{disposición a gastar por el consumidor} = \$\ 460.83$$

b) La curva se representa en la siguiente gráfica, la cantidad total, \$460.83 USD, que los consumidores están dispuestos a gastar por 5 pases.

4.5 Utilidades producidas por equipo industrial

Es bien sabido que cuando una compañía se hace de los servicios de un equipo nuevo de producción, el equipo genera utilidades a cambio de un pequeño costo que éste genera para su mantenimiento. Al transcurrir del tiempo, se inicia el desgaste de los componentes del equipo industrial, esto a su vez se refleja en el incremento de los costos de mantenimiento, y el equipo comienza a ser menos rentable. Esta rentabilidad llega cero cuando la función de utilidad es igualada a la función de mantenimiento, como se muestra en la gráfica:



Por lo tanto la utilidad generada por una maquinaria será el área entre las curvas de ingresos de producción y egresos de mantenimiento, desde el tiempo inicial t_0 al tiempo límite de rentabilidad t, es decir:

$$\text{utilidad por una maquinaria} = \int_0^t \left[I(x) - C(x) \right] dx$$

EJEMPLOS 4.2

1. Un equipo industrial genera ingresos a la razón de $I(x) = 2\,200 - 10x^2$ dólares por año, así como costos de mantenimiento a la razón de $C(x) = 40 + 5x^2$ dólares por año.[12]

a) ¿Durante cuántos años será el límite de rentabilidad del equipo?

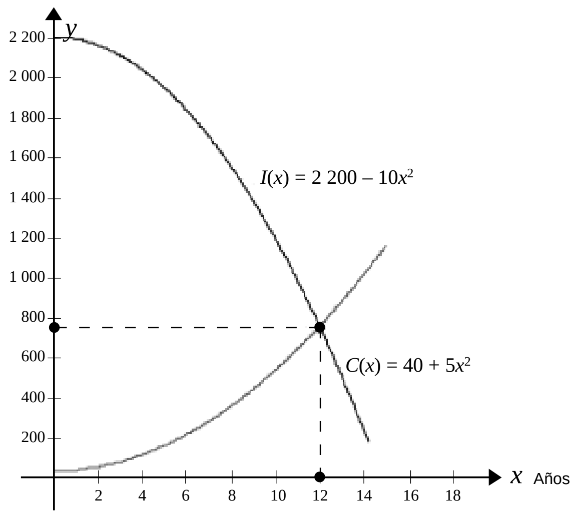
b) ¿Cuál es la utilidad generada por el equipo durante el periodo de rentabilidad?

a) Para determinar el punto de rentabilidad, se igualan las funciones de ingresos y costos:

$$2\,200 - 10x^2 = 40 + 5x^2$$

$$2\,160 = 15x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{2\,160}{15}} = 12 \text{ años}$$



b) Para determinar la utilidad generada por el equipo durante el periodo de rentabilidad, se determina la integral definida:

$$\text{utilidad del equipo industrial} = \int_0^{12} \left[(2\,200 - 10x^2) - (40 + 5x^2) \right] dx$$

[12] Ejemplo tomado de: Hoffmann, Laurence D. y Gerald L. Bradley (1999). *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales.* 6a. ed. México: McGraw-Hill.

$$= \int_0^{12} (2\,160 - 15x^2)\, dx$$

$$= 2\,160x - 5x^3 \Big|_0^{12}$$

utilidad del equipo industrial $= \$\ 17\,280$ USD

2. Supóngase que la función de demanda de los consumidores de cierto artículo es $D(q) = 4(25 - q^2)$ dólares por unidad.

a) Hallar el excedente de los consumidores si el artículo se vende a $64 USD por unidad.

b) Trazar la curva de demanda e interpretar el área que representa el excedente de los consumidores.

a) Primero se encuentra el número de unidades que se comprarán, resolviendo la ecuación de demanda $p = D(q)$ para q cuando $p = \$\ 64$ USD para obtener

$$64 = 4(25 - q^2)$$
$$16 = 25 - q^2$$
$$q = 3$$

Es decir, se comprarán 3 unidades cuando el precio sea $64 USD por unidad. El excedente de los consumidores correspondiente es:

$$\int_0^3 D(q)dq - 64(3)$$

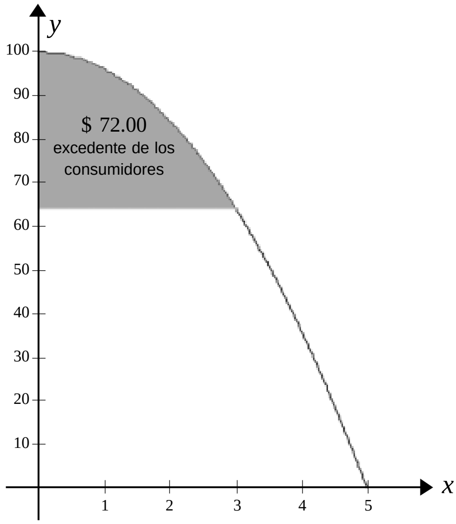
$$= 4\int_0^3 (25 - q^2)\, dq - 192$$

$$= 4\left(25q - \tfrac{1}{3}q^3\right)\Big|_0^3 - 192$$

$$= 264 - 192$$

$$= \$\ 72 \text{ USD}$$

b) En la siguiente figura se muestra la curva de demanda de los consumidores.



$D(q) = 4(25 - q^2)$ curva de demanda de los consumidores

EJERCICIOS 4.1 Resolver los siguientes ejercicios:

1. *Función de demanda.*[13] La función de demanda de cierta marca de bicicleta de 10 velocidades está dada por:

$$p = D(x) = -0.001x^2 + 250$$

donde p es el precio unitario en dólares y x es la cantidad demandada en unidades de millar. La función de oferta para estas bicletas está dado por: $$p = O(x) = 0.0006x^2 + 0.02x + 100$$

donde p representa el precio unitario en dólares y x es el número de bicicletas que el proveedor pondrá en el mercado, en unidades de millar. Determinar el excedente de los consumidores y de los productores si el precio de mercado de una bicicleta se iguala al precio de equilibrio.

[13] *Ibidem*.

2. Una maquinaria industrial de x años genera ingresos a la razón de $R(x) = 6\,025 - 10x^2$ dólares por año y origina costos que se acumulan a la razón de $C(x) = 4\,000 + 15x^2$ dólares por año.

a) ¿Durante cuántos años es rentable el uso de la maquinaria?

b) ¿Cuánta ganancia neta genera la maquinaria durante el periodo indicado en el inciso a?

3. Supóngase que la función de demanda de los consumidores de cierto artículo es $D(q) = 2(64 - q^2)$ dólares por unidad.[14]

a) Hallar la cantidad total de dinero que los consumidores están dispuestos a gastar para obtener $q_0 = 6$ unidades del artículo.

b) Trazar la curva de demanda e interpretar el área que representa la respuesta del inciso a.

[14] *Ibidem*.

Solución a ejercicios

Ejercicios 1.1

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{x-2} = 0$

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{x-2} =$ no hay límite

3. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{4t^2+3t+2}{t^3+2t-6} = -\dfrac{1}{3}$

4. $\lim\limits_{x \to 25} \dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25} = \dfrac{1}{10}$

5. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4} = 8$

6. $\lim\limits_{x \to h} \dfrac{x^4-h^4}{x^2-h^2} = 2h^2$

7. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2} = -2$

8. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^3-(x+h)^3}{h} = -3x^2$

9. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^2h+3xh^2+h^3}{2xh+5h^2} = \dfrac{x}{2}$

10. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x^3-8x^2+x-4}{x-4} = 33$

11. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2+2x-12}{x^2+x-6} = 2$

12. $\lim\limits_{x \to 49} \dfrac{\sqrt{x}-7}{x-49} = \dfrac{1}{14}$

Ejercicios 1.2

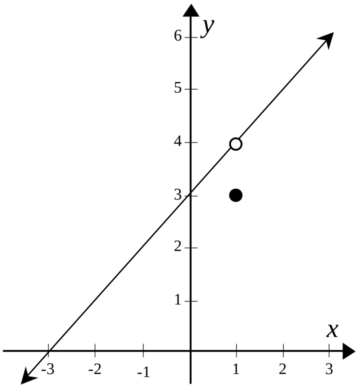
1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5-2x^2}{3x+5x^2} = -\dfrac{2}{5}$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x+5}{2x+3} = 2$

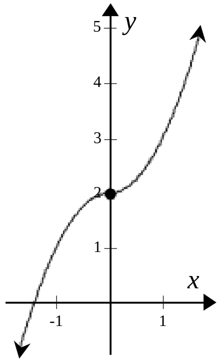
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^3-5x^2+3}{2x^3+4x-7} = 3$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} =$ no hay límite

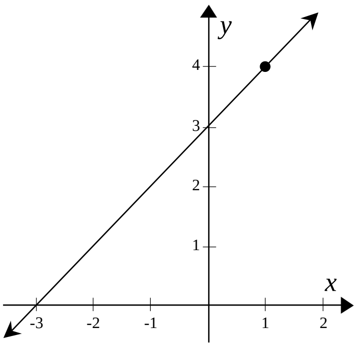
EJERCICIOS 1.3



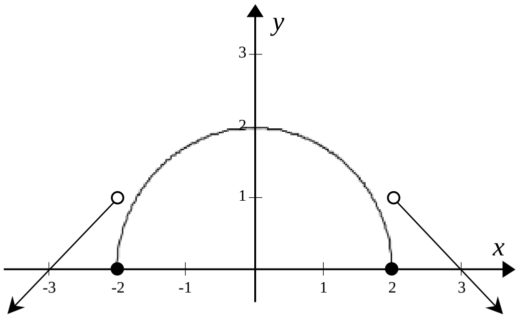
1. La función es discontinua en $x = 1$



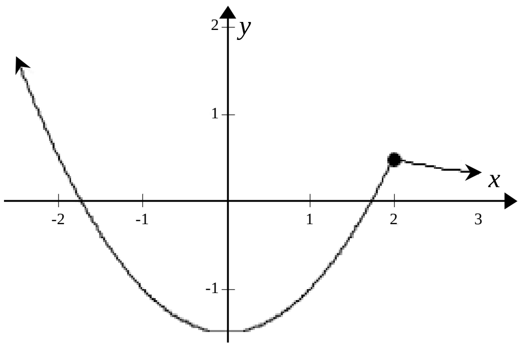
2. La función es continua para toda x



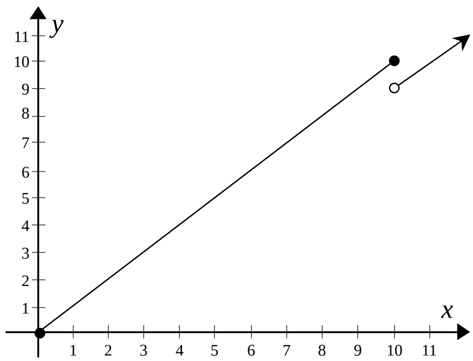
3. La función es continua para toda x



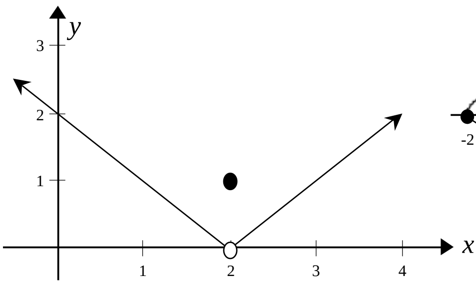
4. La función es discontinua en $x = \pm 2$



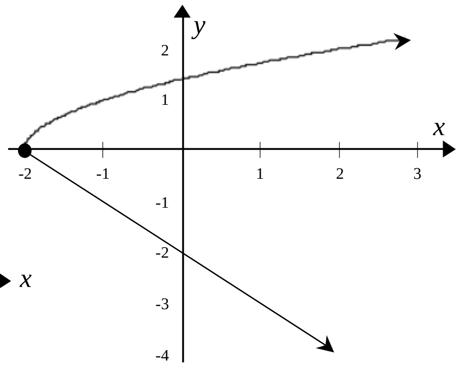
5. La función es continua para toda x



6. La función es discontinua en $x = 10$



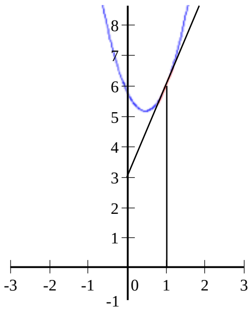
7. La función es discontinua en $x = 2$



8. La función es continua en $[-2, +\infty]$

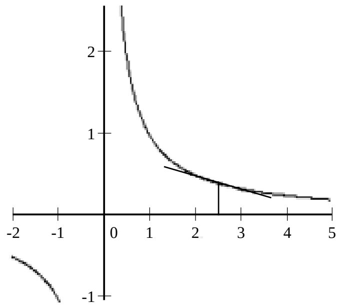
EJERCICIOS 1.4

1. $f'(x) = 6x - 3; \quad m = 3$



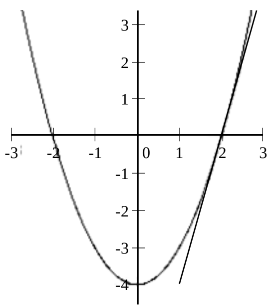
$x = 1 \quad y' = 3$

2. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}; \quad m = -0.16$



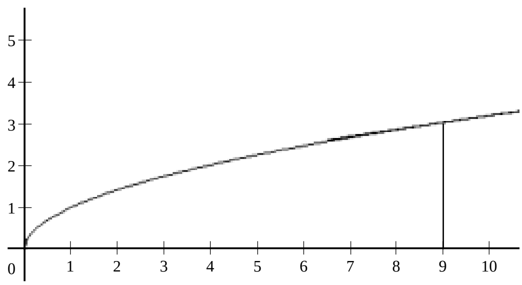
$x = 2.5 \quad y' = -0.16$

3. $y' = 2x; \quad m = 4$



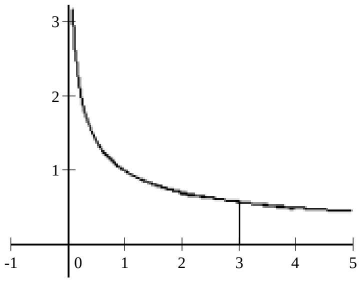
$x = 2 \quad y' = 4$

4. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}; \quad m = 0.1666$



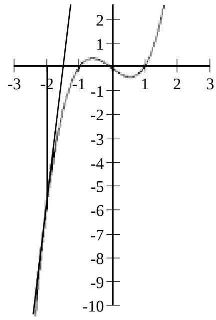
$x = 9 \quad y' = 0.17$

5. $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$; $m = -0.1$



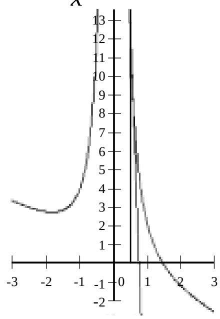
$x = 3 \quad y' = -0.1$

6. $f'(x) = 3x^2 - 1$; $m = 11$



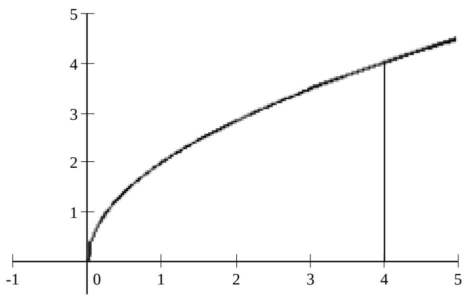
$x = -2 \quad y' = 11$

7. $f'(x) = -\dfrac{6}{x^3} - 1$; $m = -49.04$



$x = 0.5 \quad y' = -49.04$

8. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $m = 0.5$



$x = 4 \quad y' = 0.5$

EJERCICIOS 1.5

1. $y' = -\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{2}{t^3} - \dfrac{1}{2\sqrt{t^3}}$

2. $y' = \dfrac{12(x+2)^2}{(x-2)^4}$

3. $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{3}{2\sqrt{x^5}}$

4. $y' = 12x^5 + 5x^4 - 30x^2 - 10x$

5. $g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} - \dfrac{3}{\sqrt{x^5}}$

6. $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

7. $y' = \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \dfrac{1}{4\sqrt{x}} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}$

8. $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{2x^2}$

9. $g'(x) = -3\,600x^2 + 1\,600x + 18\,000$

10. $f'(x) = -\dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x+4)^2}$

EJERCICIOS 1.6

1. *a*) $d'(x) = \dfrac{x}{(0.01x^2 + 1)^2}$

b) $d'(5) = -3.2$; $d'(10) = -2.5$;
$d'(15) = -1.4$

2. *a*) $P'(t) = \dfrac{800(2t + 5)}{(t^2 + 5t + 40)^2}$

b) $P'(10) = 20\ 790$; se incrementa a 554 habitantes.

EJERCICIOS 1.7

1. *a*) $c(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{1'500\ 000 + 0.05(10\ 000)^2}{10\ 000}$

$c(x) = \$650.00$

b) $\Delta C = C(x + \Delta x) - C(x)$

$\Delta C = C(12\ 000) - C(10\ 000)$

$\Delta C = 1'500\ 000 + 0.05(12\ 000)^2 - \left[1'500\ 000 + 0.05(10\ 000)^2\right]$

$\Delta C = \$2'200\ 000.00$

c) $C'(x) = 0.1x$

$C'(10\ 000) = 0.1(10\ 000)$

$C'(x) = \$1\ 000.00$

d) $R(x) = px = \left(\dfrac{200\ 000 - x}{10}\right)x = \left(\dfrac{200\ 000x - x^2}{10}\right)$

$R(x) = 20\ 000x - 0.1x^2$

$R'(x) = 20\ 000 - 0.2x$

$R'(10\ 000) = 20\ 000 - 0.2(10\ 000)$

$R'(x) = \$18\ 000.00$

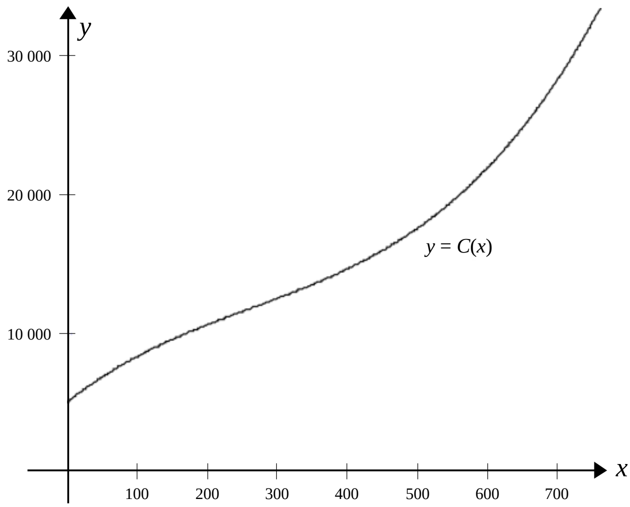
2. *a*) \$99.80

b) \$100.00

3. *a*) $C'(x) = 0.0003x^2 - 0.16x + 40$

b) $C'(500) = 0.0003(500)^2 - 0.16(500) + 40 = \$35.00$

c)



4. *a*) $R(x) = px$

$R(x) = -0.02x^2 + 400x$

b) $R'(x) = -0.04x + 400$

c) $R'(2\ 000) = -0.04(2\ 000) + 400 = 320$

El ingreso real obtenido por la venta del sistema de sonido número 2001 es de \$320.00, aproximadamente.

5. *a*) $P(x) = R(x) - C(x)$

$P(x) = -0.02x^2 + 300x - 200\ 000$

b) $P'(x) = -0.04x + 300$

c) $P'(2\ 000) = -0.04(2\ 000) + 300 = 220$

La utilidad real obtenida por la venta del sistema 2001 es de \$220.00, aproximadamente.

EJERCICIO 1.8

1. *a*) 28 unidades por hora.

b) A las $9{:}00$ am la tasa de producción es de 10 unidades.

EJERCICIOS 1.9

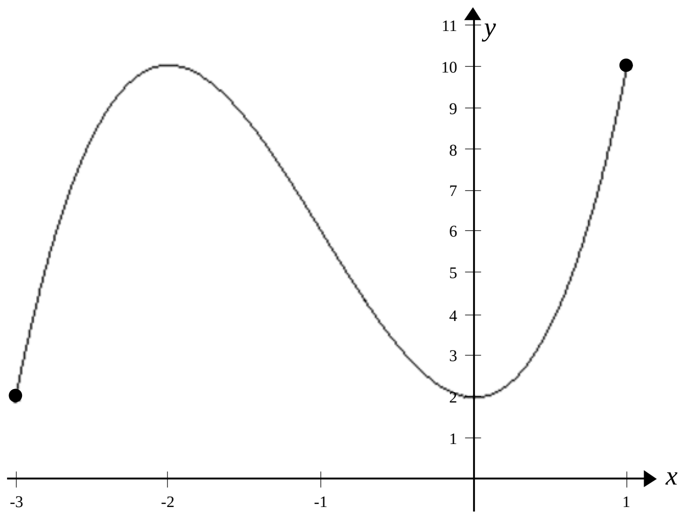
1. La tasa de crecimiento al principio de 1996 esta dado por: $N'(2) = 2.208e^{0.64(2)} = 7.94138$ o unos 7.94 millones de computadoras por año.

Para 1999 está dado por: $N'(5) = 2.208e^{0.64(5)} = 54.16783$ o aproximadamente 54.17 millones de computadoras por año.

2. La cantidad a pagar es $\$1'000\ 000.00$.

EJERCICIOS 2.1

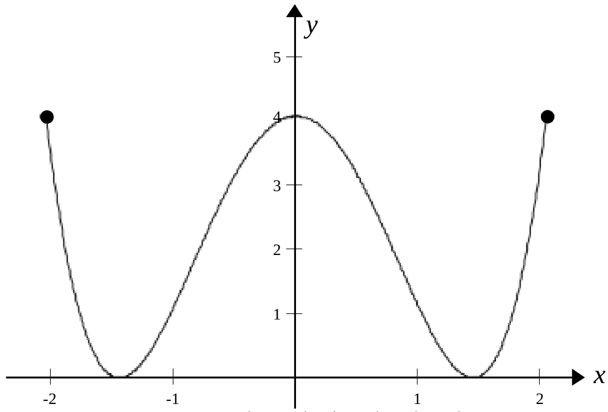
1.



Máximos en $(-2, 10)$ y $(1, 10)$

Mínimos en $(-3, 2)$ y $(0, 2)$

2.

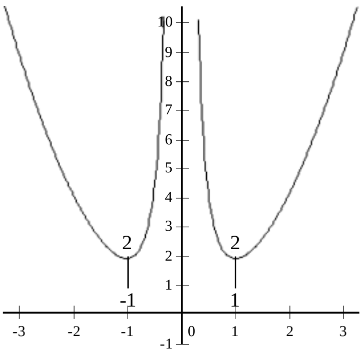


Máximos en $(-2, 4)$, $(0, 4)$ y $(2, 4)$

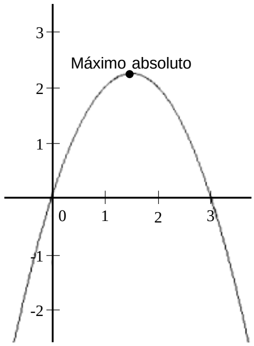
Mínimos en $(-\sqrt{2}, 0)$ y $(\sqrt{2}, 0)$

EJERCICIOS 2.2

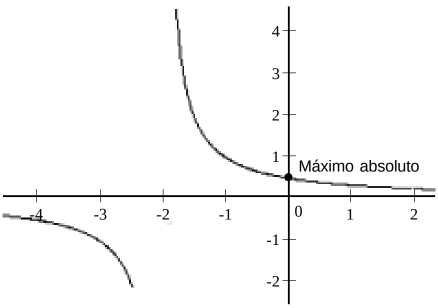
1. Mínimos en $(-1, 2)$ y $(1, 2)$



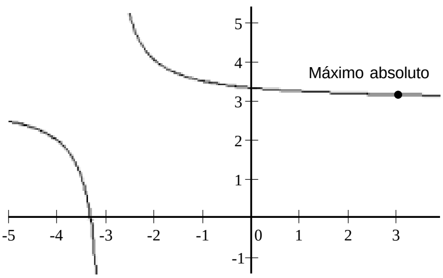
4. Máximo en $(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$



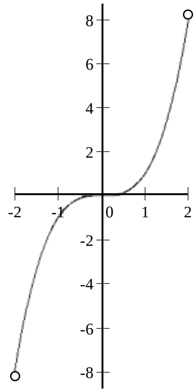
2. Máximo en $(0, \frac{1}{2})$



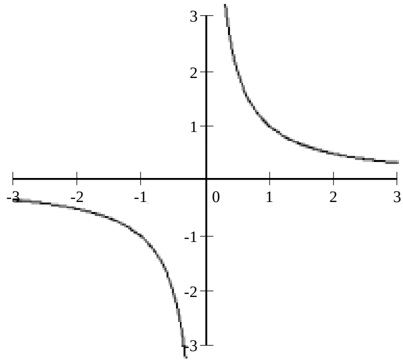
5. Máximo en $(3, 3\frac{1}{6})$



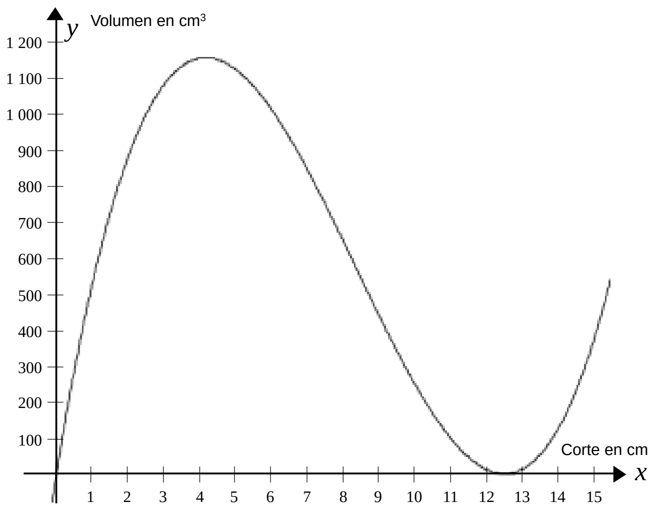
3. Ni máximos ni mínimos



6. Ni máximos ni mínimos



EJERCICIOS 2.3



1. 4.166 cm.

2. El grupo deberá constar de 37 o 38 turistas para obtener una máxima utilidad de $14 060.00.

3. Perímetro = 182.96 m.

4. 6m × 6m de base y 3m de alto.

5. 7 500 unidades.

EJERCICIOS 3.1

1. $\frac{2}{9}\sqrt{x^9} + \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + 2\sqrt{x} + C$

2. $\frac{18}{11}\sqrt[3]{x^{11}} + C$

3. $\frac{6}{7}\sqrt[3]{x^7} + 3\sqrt[3]{x^4} - \frac{9}{2}\sqrt[3]{x} + C$

4. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$

EJERCICIOS 3.2

1. $\frac{2}{15}\sqrt{(5x+2)^3} + C$

2. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2-4)^3} + C$

3. $\frac{1}{12}\sqrt{(2x^4-4)^3} + C$

4. $2\ln(x^2+2) + C$

5. $-\dfrac{4}{3\sqrt{3x^2+12x+4}} + C$

6. $-\dfrac{1}{12(2x^3+8)^2} + C + C$

7. $x - 2\ln(x+2) + C$

8. $\frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7} - \frac{4}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C$

9. $\frac{1}{2}\ln(x^4-4) + C$

10. $\frac{3}{20}\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}x^3 - 4x + 8\right)^5} + C$

EJERCICIOS 3.3

1. 144.82

2. 64.59

3. 1 322.7 euros.

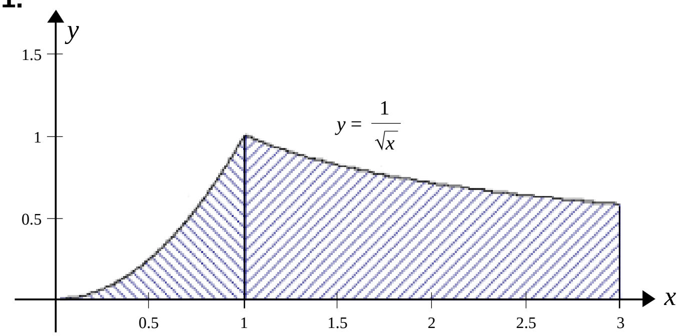
4. 62 286 habitantes.

EJERCICIO 3.4

1. $\$6\frac{1}{3}$ millones.

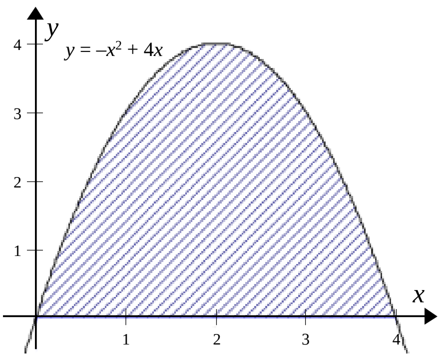
EJERCICIOS 3.5

1.



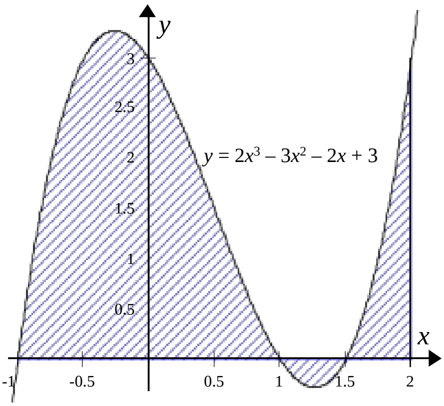
A = 1.7974 unidades^2

2.



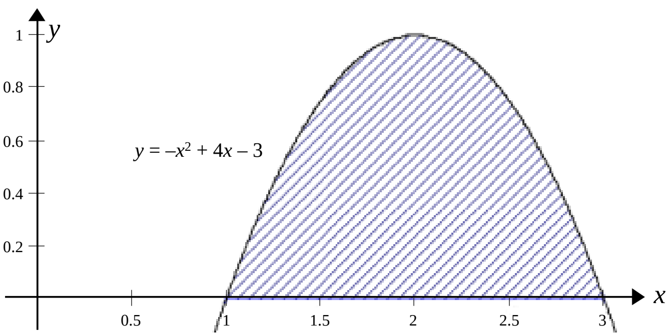
A = 10.66 unidades^2

3.



A = 4.5 unidades^2

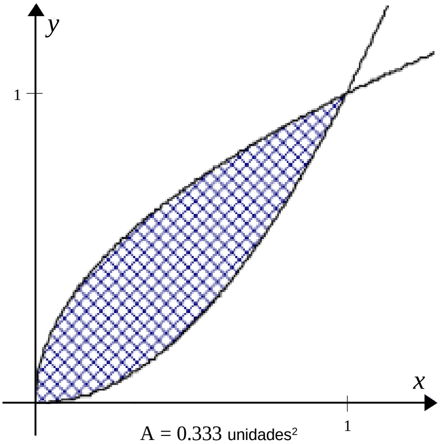
4.



A = 1.33 unidades^2

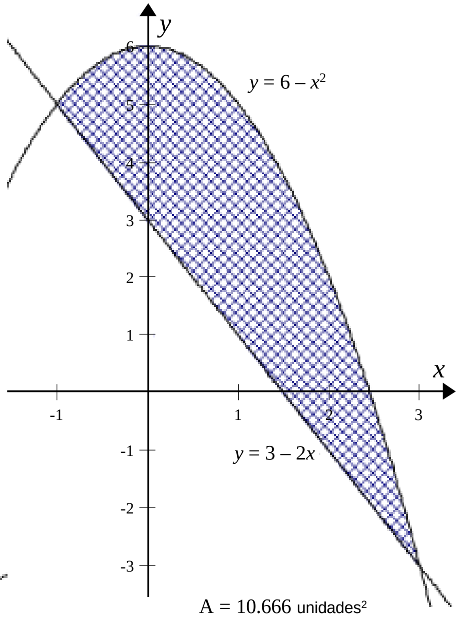
EJERCICIOS 3.6

1.



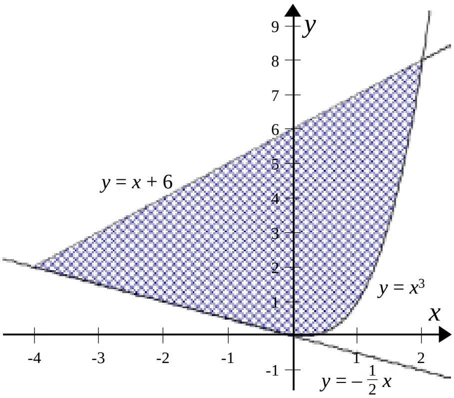
A = 0.333 unidades²

2.



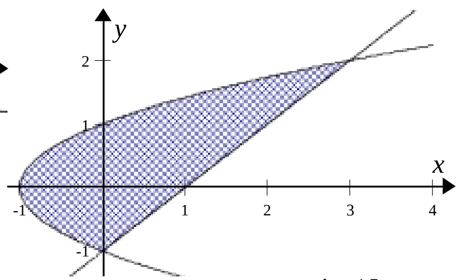
A = 10.666 unidades²

3.



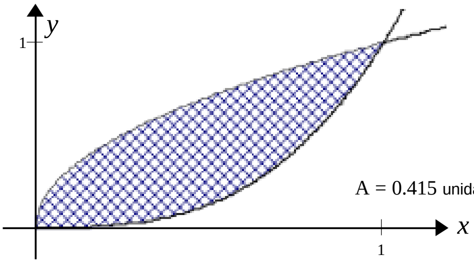
A = 21.99 unidades²

4.



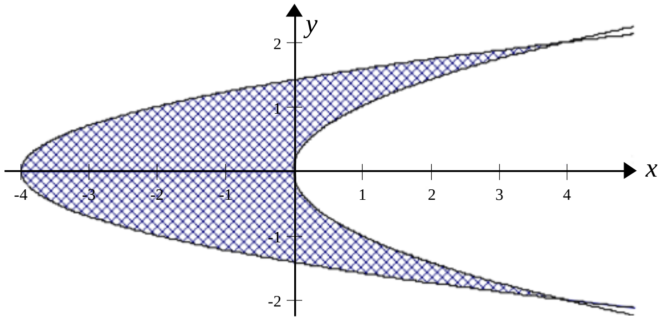
A = 4.5 unidades²

5.



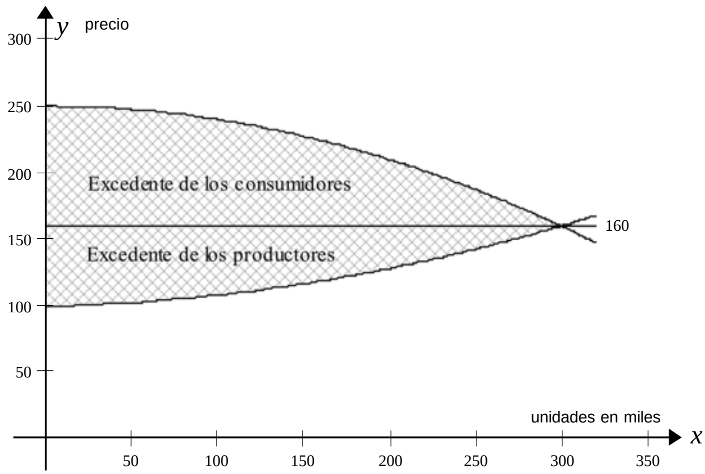
A = 0.415 unidades²

6.



EJERCICIOS 4.1

1.



Excedente del consumidor

$= \int_0^{300} \left(-0.001x^2 + 250\right)dx$ – (precio de equilibrio) (cantidad de equilibrio)

$= \int_0^{300} \left(-0.001x^2 + 250\right)dx - (160)\ (300\,000)$

$= \$18'000\,000.00$

Excedente de los productores

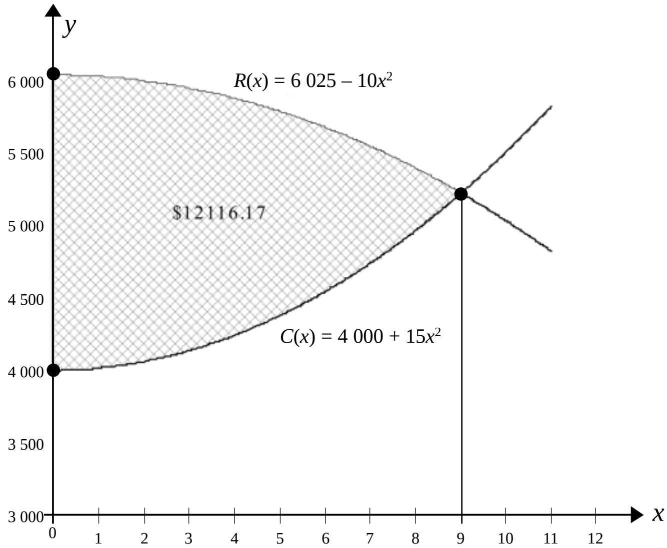
$= (160)\ (300\,000) - \int_0^{300} \left(-0.001x^2 + 250\right)dx$

$= \$11'700\,000.00$

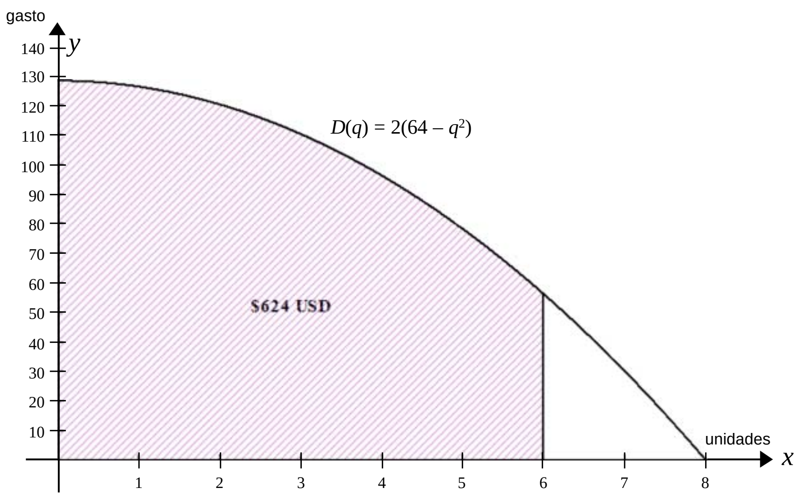
2. *a*) 9 años

b) \$12 150.00

c) La ganancia neta es el área de la región acotada entre curvas $R(x) = 6\ 025 - 10x^2$ y $C(x) = 4\ 000 + 15x^2$



3. \$624.00 USD



Bibliografía

GRANVILLE, William A. (1989). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.

HOFFMANN, Laurence D. y Gerald L. Bradley (1999). *Cálculo para Administración, Economía y Ciencias Sociales.* 6a. ed. México: McGraw-Hill.

LEITHOLD, Louis (1986). *El Cálculo con Geometría Analítica*. 5a. ed. México: Harla.

SWOKOWSKY, Earl W. (1988). *Cálculo con Geometría Analítica*. 2a. ed. México: Grupo Iberoamérica.

TAN, Soo Tang (2005). *Matemáticas para Administración y Economía.* 4a. ed. México: Thomson.

Cálculo para administración y turismo
terminó de imprimirse en noviembre de 2009
en los talleres de Ediciones de la Noche,
edicionesdelanoche@gmail.com
Guadalajara, Jalisco, México.

Composición tipográfica: Laura Biurcos Hernández.

Tiraje: 500 ejemplares.